Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2015-03-17 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Låt $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x}$ för $x \neq 0$. Bestäm värdemängden V_f.

2. (a) Undersök $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.
   (b) Undersök $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin(2/x)$.
   (c) Ange den exakta definitionen av vad som menas med att $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 17$.

3. Beräkna följande integraler:

$$\text{(a)}\quad \int_1^2 \ln x\,dx \qquad \text{(b)}\quad \int_0^{2\pi/3} \sin^2 x\,dx \qquad \text{(c)}\quad \int \frac{x^3}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

4. Beräkna integralen om den är konvergent, eller visa att den är divergent:

$$\int_9^\infty \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}\,(x-4)}\,dx.$$

5. (a) Vad är definitionen av att funktionen f är deriverbar i punkten a?
   (b) Bevisa att om f är deriverbar i punkten a så är f kontinuerlig i punkten a.
   (c) Bevisa produktregeln för derivata.

6. Visa att

$$0 < x_2 \sin x_2 - x_1 \sin x_1 < \left(1 + \tfrac{\pi}{2}\right)(x_2 - x_1)$$

när $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$.

7. Beräkna $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$.

Lösningsskisser för TATA41 2015-03-17

1. Derivering av $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x}$ ger

$$f'(x) = \frac{(-2e^{-2x}) \cdot x - e^{-2x} \cdot 1}{x^2} = \frac{-2(x+\frac{1}{2})e^{-2x}}{x^2},$$

alltså följande teckentabell:

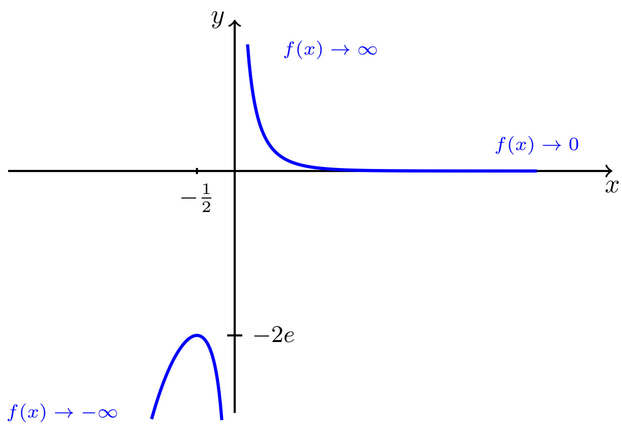
x		$-1/2$		0	
$-2e^{-2x}$	$-$		$-$		$-$
$x+\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$

Det lokala maximivärdet är $f(-1/2) = \frac{e^1}{-1/2} = -2e$. Vi ser direkt att $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 0^{\pm}$ (så att linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot till grafen $y = f(x)$), och att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ (så att linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot). För att se vad som händer då $x \to -\infty$ sätter vi $t = -2x$ (så att $t \to \infty$) och får

$$\frac{e^{-2x}}{x} = \frac{e^t}{-t/2} = -2 \underbrace{\frac{e^t}{t}}_{\to\infty} \to -\infty$$

enligt ett standardgränsvärde ("hastighetstabell").

Nu kan vi rita grafen och läsa av värdemängden ur den:



Svar: $V_f = \{y \in \mathbf{R} : y \le -2e \text{ eller } y > 0\} =]-\infty, -2e] \cup]0, \infty[$.

2. (a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \left[t=\sqrt{x}\right] = \lim_{t\to 1}\dfrac{t-1}{t^4-1} = \lim_{t\to 1}\dfrac{1}{t^3+t^2+t+1} = \dfrac{1}{4}.$

   (b) $\lim_{x\to\infty} x\sin(2/x) = \left[t=\frac{2}{x}\right] = \lim_{t\to 0^+}\dfrac{2\sin t}{t} = 2\cdot 1 = 2$, enligt ett standardgränsvärde.

   (c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 17$ betyder att f:s definitionsmängd D_f innehåller godtyckligt stora tal och att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ω sådant att $17-\varepsilon < f(x) < 17+\varepsilon$ när $x\in D_f$ och $x>\omega$.

   Svar: Se ovan.

3. (a) $\int_1^2 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$

   (b) $\int_0^{2\pi/3}\sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi/3}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi/3} = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}.$

   (c) Polynomdivision och partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3}{(x+1)(x+2)}\,dx &= \int\frac{x^3}{x^2+3x+2}\,dx\\ &= \int\left(x-3+\frac{7x+6}{x^2+3x+2}\right)dx\\ &= \int\left(x-3+\frac{8}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= \tfrac{1}{2}x^2-3x+8\ln|x+2|-\ln|x+1|+C.\end{aligned}$$

   Svar: Se ovan.

4. Med hjälp av variabelbytet $t=\sqrt{x}$ (alltså $x=t^2$ och $dx = 2t\,dt$) finner vi att

$$\begin{aligned}\int_9^{\omega}\frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}\,(x-4)}\,dx &= \int_3^{\sqrt{\omega}}\frac{t+6}{t\,(t^2-4)}\,2t\,dt\\ &= 2\int_3^{\sqrt{\omega}}\left(\frac{2}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt\\ &= 2\left[\ln\frac{(t-2)^2}{t+2}\right]_3^{\sqrt{\omega}}\\ &= 2\left[\ln\frac{t(1-\frac{2}{t})^2}{1+\frac{2}{t}}\right]_3^{\sqrt{\omega}}\\ &= 2\ln\frac{\sqrt{\omega}\,(1-\frac{2}{\sqrt{\omega}})^2}{1+\frac{2}{\sqrt{\omega}}} - 2\ln\frac{1}{5} \to \infty \qquad \text{då } \omega\to\infty.\end{aligned}$$

   Svar: $\int_9^{\infty}\frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}\,(x-4)}\,dx$ är divergent.

5. Se läroboken.

6. Sätt $f(x) = x \sin x$. Denna funktion har derivatan

$$f'(x) = \sin x + x \cos x,$$

och för $0 < x < \pi/2$ är det uppenbart att

$$0 < f'(x) < 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 1,$$

eftersom både $\sin x$ och $\cos x$ är mindre än 1, och x är mindre än $\pi/2$, och alla tre är positiva.

Givet $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ säger medelvärdessatsen för derivator att det finns minst en punkt ξ sådan att $0 < x_1 < \xi < x_2 < \frac{\pi}{2}$ och

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$

Enligt ovan ligger $f'(\xi)$ strängt mellan 0 och $1 + \frac{\pi}{2}$, och detta medför att

$$0 \cdot (x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < \left(1 + \tfrac{\pi}{2}\right) \cdot (x_2 - x_1),$$

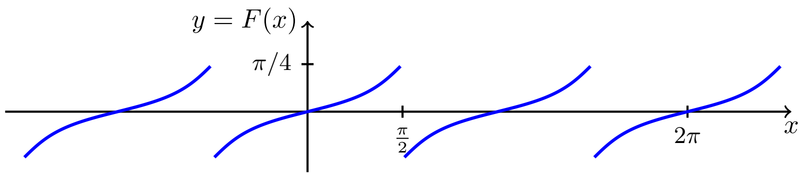
vilket var vad som skulle visas.

7. Variabelbytet $t = \tan x$ ger

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} &= \int \frac{dx/\cos^2 x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 4} \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t}{2}\right) + C = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Direkt insättning av gränserna i primitiven $F(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right)$ ger $F(2\pi) - F(0) = 0 - 0$, men detta är uppenbart inte korrekt. Den funktion som vi integrerar, $f(x) = 1/(\sin^2 x + 4\cos^2 x)$, är ju *positiv* överallt, så att integralen skulle bli *noll* är helt orimligt!

Problemet är att insättningsformeln $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ kräver att F är en primitiv funktion till f på *hela* integrationsintervallet, men vår primitiv $F(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right)$ är odefinierad i punkterna $x = \pi/2 + n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$), så den är inte giltig på hela intervallet $[0, 2\pi]$ utan bara på intervall som t.ex. $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

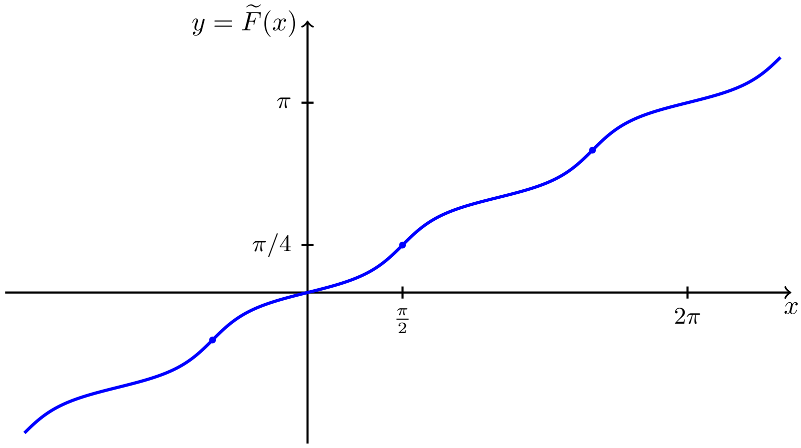


Ett sätt att komma runt detta är att notera att både $\sin^2 x$ och $\cos^2 x$ är periodiska med perioden π, så detsamma gäller för $f(x)$. Integralen $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$ löper alltså över två perioder, och integralen av en periodisk funktion över en period är oberoende av var man börjar; alltså kan vi lika gärna integrera över perioden $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ där vi känner till en primitiv funktion (förutom i ändpunkterna, men det kan hanteras genom att ta ett gränsvärde), och sedan multiplicera med 2:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx \\
&= \lim_{b\to(\pi/2)^-} 2\int_{-b}^{b} f(x)\,dx \\
&= \lim_{b\to(\pi/2)^-} 2\big(F(b)-F(-b)\big) \\
&= \lim_{b\to(\pi/2)^-} 2\arctan\left(\frac{\tan b}{2}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}
$$

Ett annat sätt är att välja olika integrationskonstanter i olika intervall, och lappa ihop i skarvningspunkterna, för att skapa en annan primitiv $\widetilde{F}$ som är giltig på hela $\mathbf{R}$:

$$
\widetilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) + \frac{n\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi, \\ \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} + n\pi. \end{cases}
$$



Detta ger $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \widetilde{F}(2\pi) - \widetilde{F}(0) = \pi - 0$.

Svar: Integralen är lika med π.