Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2015-01-14 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln(3 + x^2) - \ln|1 + x|$. Ange alla lokala maxima och minima samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Beräkna de obestämda integralerna
   (a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x\,dx$.

3. Bestäm gränsvärdena
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{e^x+e^{2x}}-e^x$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{(e^{\sqrt{x}}-1)(\ln(1+\sqrt{x}))}$.

4. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2-x)}$.

5. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator.
   (b) Antag att $f'(x) > 0$ för alla x på något intervall $]a, b[$. Visa att f är strängt växande på $]a, b[$.
   (c) Låt f vara en funktion som är deriverbar och strängt växande på ett intervall $]a, b[$. Måste det gälla att $f'(x) > 0$ för alla $x \in]a, b[$? Bevisa eller ge ett motexempel.

6. Betrakta funktionen $f(x) = 1/x$, $x > 0$. Givet en punkt på grafen avgränsar tangenten och normalen i denna punkt tillsammans med x-axeln en rätvinklig triangel. Vilken är den minsta längd som hypotenusan kan ha?

7. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\arctan\frac{k}{n}$.

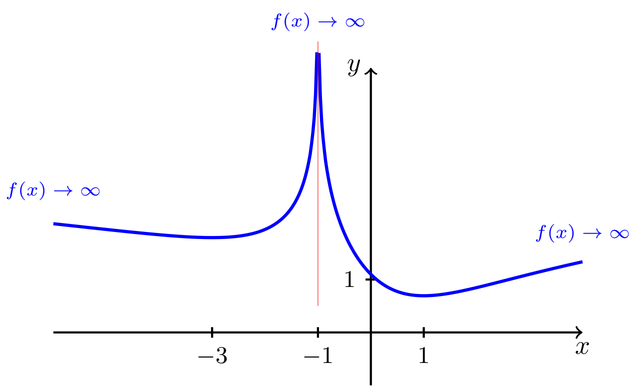
Lösningsskisser för TATA41 2015-01-14

1. Funktionen $f(x) = \ln(3+x^2) - \ln|1+x|$ är definierad för $x \neq -1$, och har derivatan
$$f'(x) = \frac{2x}{3+x^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{(x+3)(x-1)}{(3+x^2)(x+1)},$$
vilket ger följande teckentabell:

x		-3		-1		1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$3+x^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Lokala minimivärden: $f(-3) = \ln 12 - \ln 2 = \ln 6$ och $f(1) = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$. Då $x \to -1$ ser vi enkelt att
$$f(x) = \underbrace{\ln(3+x^2)}_{\to \ln 4} - \underbrace{\ln \underbrace{|1+x|}_{\to 0^+}}_{\to -\infty} \to \infty,$$
och då $x \to \pm\infty$ får vi
$$f(x) = \ln \frac{x^2+3}{|x+1|} = \ln \left| \frac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})} \right| = \underbrace{\ln|x|}_{\to\infty} + \underbrace{\ln \left| \frac{1+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \right|}_{\to \ln 1 = 0} \to \infty.$$

Grafen har alltså följande utseende:



Svar: Lokala minima $f(-3) = \ln 6$ och $f(1) = \ln 2$. Inga lokala maxima. Linjen $x = -1$ är en lodrät asymptot. Vågräta asymptoter saknas.

2. (a) Partiell integration ger $\int x^{1/2}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + C$.

   (b) Variabelbytet $t = \sin x$ ger en standardprimitiv: $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2}$.

   (c) Hur man gör förklaras t.ex. i Exempel 5.11 i läroboken (Forsling–Neymark).

   Svar: (a) $(\frac{2}{3}\ln x - \frac{4}{9})x\sqrt{x} + C$ (b) $\arctan(\sin x) + C$

   (c) $\frac{1}{5}(2\sin 2x - \cos 2x)e^{-x} + C$.

3. (a) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x+1}{x+2} \to \dfrac{3}{4}$ då $x \to 2$.

   (b) $\sqrt{e^x+e^{2x}} - e^x = \dfrac{(\sqrt{e^x+e^{2x}}-e^x)(\sqrt{e^x+e^{2x}}+e^x)}{\sqrt{e^x+e^{2x}}+e^x} = \dfrac{(e^x+e^{2x})-e^{2x}}{e^x(\sqrt{e^{-x}+1}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{e^{-x}+1}+1} \to \dfrac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \dfrac{1}{2}$ då $x \to \infty$.

   (c) $\dfrac{\tan 2x}{(e^{\sqrt{x}}-1)\ln(1+\sqrt{x})} = 2\cdot\dfrac{\tan 2x}{2x}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+\sqrt{x})} \to 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 2$ då $x \to 0^+$, enligt standardgränsvärden.

   Svar: (a) $3/4$ (b) $1/2$ (c) 2.

4. Variabelbytet $t = \sqrt{x}$ (och därmed $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$), följt av partialbråksuppdelning, ger

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2-x)} &= \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{2t\,dt}{t\,(t^4-t^2)} \\
&= \int_{\sqrt{2}}^\infty \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t^2}\right) dt \\
&= \left[\ln\frac{t-1}{t+1} + \frac{2}{t}\right]_{\sqrt{2}}^\infty \\
&= \lim_{\omega\to\infty}\left(\ln\frac{1-\frac{1}{\omega}}{1+\frac{1}{\omega}} + \frac{2}{\omega}\right) - \left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\
&= (\ln 1 + 0) + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2} \\
&= 2\ln(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

   (I sista steget används omskrivningen $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1}$.)

   Svar: $2\ln(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}$.

5. (a) Se läroboken (Forsling–Neymark), sats 4.10.

   (b) Se läroboken, beviset av sats 4.8 i slutet av avsnitt 4.4.

   (c) Nej, derivatan måste inte vara positiv överallt. Motexempel: $f(x) = x^3$ är deriverbar och strängt växande på hela $\mathbf{R}$, men $f'(0) = 0$.

6. Låt $P = (a, \frac{1}{a})$ (där $a > 0$) vara en godtycklig punkt på kurvan $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Kurvans tangentlinje T i denna punkt P har lutningen $f'(a) = -1/a^2$, så man måste gå a enheter åt höger i x-led för att linjen T ska sjunka $1/a$ enheter i y-led; T skär alltså x-axeln i punkten $(a + a, 0)$. Normallinjen N har lutningen $-1/(-1/a^2) = a^2$, så man måste gå $1/a^3$ enheter åt vänster i x-led för att linjen N ska sjunka $1/a$ enheter i y-led; N skär alltså x-axeln i punkten $(a - \frac{1}{a^3}, 0)$. Triangelns hypotenusa går mellan dessa två skärningspunkter, och har alltså längden $g(a) = a + \frac{1}{a^3}$. Vi söker det minsta värdet på $g(a)$ för $a > 0$. Derivatan är $g'(a) = 1 - \frac{3}{a^4}$, med teckenväxlingen $-0+$ för $a > 0$; nollstället är $a = 3^{1/4}$, och detta är därmed en global minimipunkt för g. Det minsta värdet är $g(3^{1/4}) = 3^{1/4} + 1/(3^{1/4})^3 = (3 + 1)3^{-3/4}$.

   Svar: $\dfrac{4}{3^{3/4}}$.

7. Fixera ett positivt heltal n, låt $f(x) = \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n}$, och sätt $I = \int_0^n f(x)\,dx$. Eftersom funktionen f är strängt växande gäller följande summa-integral-uppskattning (vilket man ser om man ritar en lämplig figur):

$$f(0) + I < \sum_{k=0}^{n} f(k) < I + f(n).$$

   Variabelbytet $t = x/n$ ger

$$\begin{aligned} I &= \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^n \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n}\,dx = \int_0^1 \arctan t\,dt \\ &= \Big[t \arctan t \Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}, \end{aligned}$$

   och vi räknar också enkelt ut funktionsvärdena $f(0) = 0$ och $f(n) = \frac{\pi/4}{n}$. Insättning av dessa data i uppskattningen ovan ger olikheten

$$0 + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \arctan \frac{k}{n} < \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\pi/4}{n},$$

   som alltså gäller för godtyckligt $n \geq 1$. Låt nu $n \to \infty$; då går ytterleden mot $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$, och alltså gör även mittenledet det (enligt instängningsregeln).

   (Alternativ lösning: summan är en Riemannsumma för $\arctan x$ på intervallet $[0, 1]$ med delningspunkterna k/n, och konvergerar därför mot $\int_0^1 \arctan x\,dx$.)

   Svar: $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}$.