Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2014-08-26 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2 x\,e^{-2x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^4 \ln(1+\sqrt{x})\,dx.$

2. Hur många reella lösningar har ekvationen $x^2 - 3x + \ln x = k$ för olika värden på den reella konstanten k?

3. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3-8}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\ln\frac{1}{x} + \ln(x+3)\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(4\cdot 2^x)}{\ln(3x+e^x)}.$

4. (a) Bestäm $f'(x)$, då $f(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt.$

   (b) Härled derivatan av $f(x) = e^{2x}$ med hjälp av derivatans definition.

   (c) Låt $f(x) = \dfrac{1}{x}$ för $x \neq 0$. Är funktionen f avtagande? Motivera tydligt.

5. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

6. Skissa grafen till funktionen $f(x) = x - 2 + \arctan\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2}\ln\left(4+x^2\right)$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

7. Låt $f(x) = \displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(e^{t+e^{-x-t}} - e^t\right)$. Skissa grafen till f.

Lösningsskisser för TATA41 2014-08-26

1. (a) Nämnarens nollställen $x = -2$ och $x = -1$ ligger utanför integrationsintervallet $[0, 1]$, så det är bara att räkna på: $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2} = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[2\ln|x+2| - \ln|x+1|\right]_0^1 = (2\ln 3 - \ln 2) - (2\ln 2 - \ln 1) = 2\ln 3 - 3\ln 2.$

   (b) $\int_0^2 x\,e^{-2x} dx = \left[(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-2x}\right]_0^2 = -\frac{5}{4}e^{-4} - (-\frac{1}{4})e^0 = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-4}).$

   (c) $\int_1^4 \ln(1+\sqrt{x})dx = \left[\begin{smallmatrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2,\ dx=2t\,dt \end{smallmatrix}\right] = \int_1^2 2t\ln(1+t)dt = \left[t^2\ln(1+t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^2}{1+t}\,dt = 4\ln 3 - \ln 2 - \int_1^2 \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) dt = 4\ln 3 - \ln 2 - \left[\frac{1}{2}(t-1)^2 + \ln|1+t|\right]_1^2 = 4\ln 3 - \ln 2 - (\frac{1}{2} + \ln 3) + (0 + \ln 2) = 3\ln 3 - \frac{1}{2}.$

   Svar: (a) $2\ln 3 - 3\ln 2$ $(= \ln\frac{9}{8})$ (b) $\frac{1}{4}(1 - 5e^{-4})$ (c) $3\ln 3 - \frac{1}{2}$.

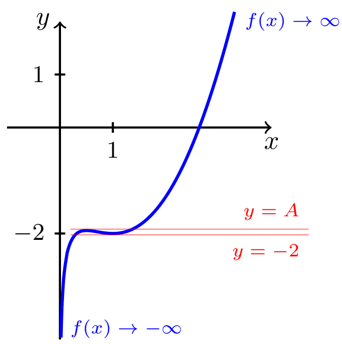
2. Funktionen $f(x) = x^2 - 3x + \ln x$ är definierad för $x > 0$, och har derivatan

$$f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x},$$

vilket ger följande teckentabell:

x	0		$\frac{1}{2}$		1	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$
x	0	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

De lokala extremvärdena är $A = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \ln\frac{1}{2} = -\frac{5}{4} - \ln 2$ (vilket är ungefär $-1{,}94$ eftersom $\ln 2 \approx 0{,}69$) och $f(1) = 1 - 3 + \ln 1 = -2$. Man ser enkelt att $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$ (eftersom $x^2 - 3x \to 0 - 0 = 0$ och $\ln x \to -\infty$) och att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ (eftersom $x^2 - 3x = x^2(1 - \frac{3}{x}) \to \infty$ och $\ln x \to \infty$). Nu kan vi rita grafen $y = f(x)$ och läsa av hur många lösningar ekvationen $f(x) = k$ har för olika värden på k (alltså antalet skärningar mellan kurvan $y = f(x)$ och den horisontella linjen $y = k$):



Svar: Låt $A = f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4} - \ln 2$ $(\approx -1{,}94)$. Ekvationen har en lösning om $k < -2$ eller $k > A$, två lösningar om $k = -2$ eller $k = A$, samt tre lösningar om $-2 < k < A$.

3. (a) Den gemensamma faktorn $x-2$ kan strykas, vilket ger att $\dfrac{x-2}{x^3-8} = \dfrac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \dfrac{1}{x^2+2x+4} \to \dfrac{1}{4+4+4} = \dfrac{1}{12}$ då $x \to 2$.

(b) $t = \frac{1}{x} \to 0^+$ då $x \to \infty$, så $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln\dfrac{1}{x} + \ln(x+3)\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x \ln\dfrac{x+3}{x} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t}\ln(1+3t) = \lim\limits_{t\to 0^+} 3\cdot\dfrac{\ln(1+3t)}{3t} = 3\cdot 1 = 3$, enligt ett standardgränsvärde.

(c) $\dfrac{\ln(4\cdot 2^x)}{\ln(3x+e^x)} = \dfrac{\ln 2^x + \ln 4}{\ln e^x + \ln(1+\frac{3x}{e^x})} = \dfrac{x\ln 2 + \ln 4}{x + \ln(1+\frac{3x}{e^x})} = \dfrac{\ln 2 + \frac{\ln 4}{x}}{1+\frac{1}{x}\ln(1+\frac{3x}{e^x})} \to \dfrac{\ln 2 + 0}{1+0\cdot\ln(1+0)} = \ln 2$ då $x \to \infty$.

Svar: (a) $\dfrac{1}{12}$ (b) 3 (c) $\ln 2$.

4. (a) Analysens huvudsats ger direkt att $f'(x) = e^{-x^2}$.

(b) Derivatan av $f(x) = e^{2x}$ är $f'(x) = 2e^{2x}$, eftersom $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{2(x+h)}-e^{2x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{2x}(e^{2h}-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2e^{2x}\cdot\dfrac{e^{2h}-1}{2h} = 2e^{2x}\cdot 1$, enligt ett standardgränsvärde.

(c) Nej, f är inte avtagande. Definitionen av avtagande är att olikheten $f(x) \le f(y)$ ska gälla för alla $x, y \in D_f$ sådana att $x > y$, och detta är inte uppfyllt här: om vi t.ex. tar $x = 1$ och $y = -1$ finner vi ju att $f(1) = 1$ är *större* än $f(-1) = -1$.

5. Om allt ska gå helt rätt till bör man notera att integralen är generaliserad i högra ändpunkten $x = 1$, eftersom $x^2/\sqrt{1-x^2} \to \infty$ då $x \to 1^-$. Efter variabelbytet $t = \arcsin x$, $dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, får man dock en vanlig (ej generaliserad) integral igen:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b x^2\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^{\arcsin b}(\sin t)^2\,dt$$
$$= \int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - (0-0).$$

Svar: $\pi/4$.

6. Funktionen $f(x) = x - 2 + \arctan \frac{2}{x} - \frac{3}{2}\ln(4 + x^2)$ är definierad för $x \neq 0$, och derivatan är

$$f'(x) = 1 + \frac{-2/x^2}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} - \frac{\frac{3}{2}\cdot 2x}{4 + x^2} = \frac{(4 + x^2) - 2 - 3x}{4 + x^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{4 + x^2},$$

vilket ger följande teckentabell:

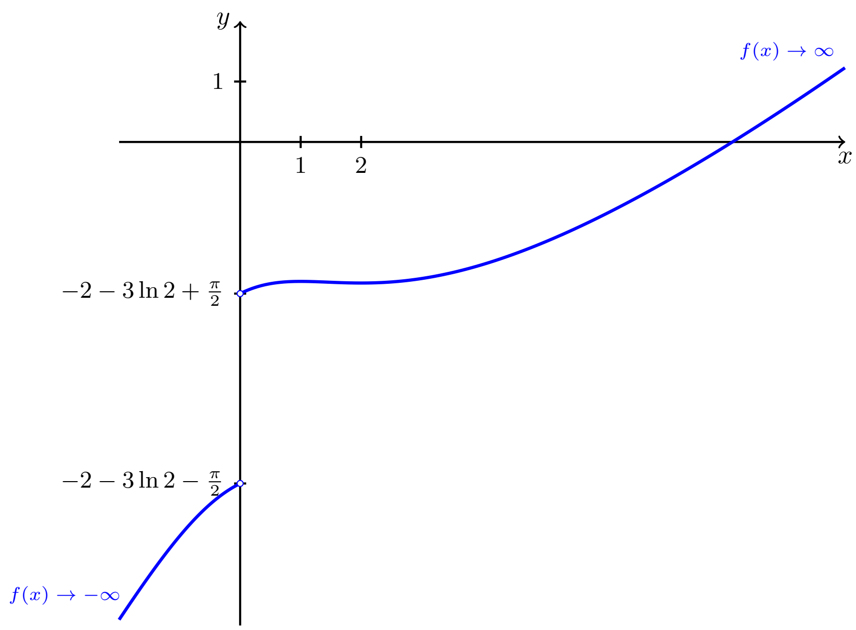
x		0		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$4+x^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Gränsvärden:

$$f(x) = \underbrace{x}_{\to\infty}\underbrace{\left(1 - 3\frac{\ln x}{x} - \frac{3}{2}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{4}{x^2} + 1\right)\right)}_{\to 1 - 3\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\cdot 0 = 1} - 2 + \underbrace{\arctan\frac{2}{x}}_{\to 0} \to \infty, \qquad \text{då } x \to \infty,$$

$$f(x) = \underbrace{x}_{\to-\infty} + \underbrace{\left(-\tfrac{3}{2}\right)\ln(4 + x^2)}_{\to-\infty} - 2 + \underbrace{\arctan\frac{2}{x}}_{\to 0} \to -\infty, \qquad \text{då } x \to -\infty,$$

$$f(x) = \underbrace{x - 2 - \frac{3}{2}\ln(4 + x^2)}_{\to 0 - 2 - \frac{3}{2}\ln 4} + \underbrace{\arctan\frac{2}{x}}_{\to\pm\frac{\pi}{2}} \to -2 - 3\ln 2 \pm \frac{\pi}{2}, \qquad \text{då } x \to 0^{\pm}.$$



Svar: Lokalt maximum $f(1) = -1 + \arctan 2 - \frac{3}{2}\ln 5$, lokalt minimum $f(2) = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\ln 8$, inga lodräta eller vågräta asymptoter.

7. Variabelbytet $s = e^{-t}$ ger

$$f(x) = \lim_{t\to\infty} e^t \left(e^{e^{-t}e^{-x}} - 1 \right) = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{s} \left(e^{se^{-x}} - 1 \right) = \lim_{s\to 0^+} \frac{e^{se^{-x}} - 1}{se^{-x}}\, e^{-x} = 1 \cdot e^{-x},$$

enligt ett standardgränsvärde. Och grafen för $f(x) = e^{-x}$ är ju välbekant: