Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2014-06-09 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2} + \arctan x$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{e^{2x}-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin 3x}{e^{2x}-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sin 3x}{e^{2x}-1}$.

3. (a) Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i punkten $x = 3$.

   (b) Bestäm derivatan av $f(x) = x^2$ med hjälp av derivatans definition.

   (c) Bestäm $f'(x)$, då $f(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{dt}{\ln(2+t^2)}$

4. Bestäm, för varje reellt värde på a, en primitiv funktion till $\dfrac{1}{x^2+a}$.

5. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

6. Bestäm alla tal $c > 0$ sådana att ekvationen $\dfrac{\ln(c(x^2-3))}{x} = 1$ har exakt två olika lösningar.

7. Låt $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. Visa att f har vänsterderivata i punkten $x = 1$ och att $f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$.

Lösningsskisser för TATA41 2014-06-09

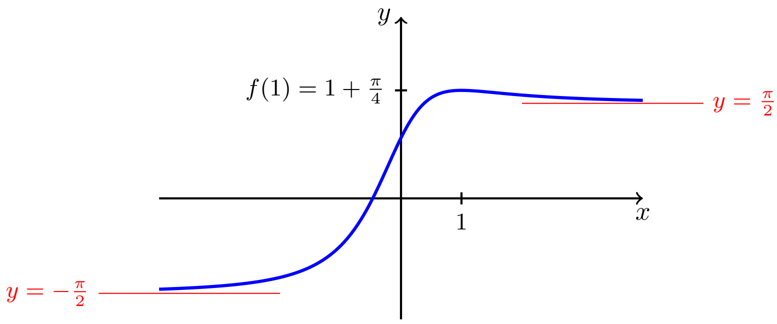
1. Funktionen $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2} + \arctan x$ är definierad för alla reella x (dvs. $D_f = \mathbf{R}$) och kontinuerlig, så det finns inga lodräta asymptoter. Linjerna $y = \pm\pi/2$ är vågräta asymptoter eftersom $f(x) \to \pi/2$ då $x \to \infty$ och $f(x) \to -\pi/2$ då $x \to -\infty$. Derivatan är

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - (1+x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2(1-x)}{(1+x^2)^2},$$

vilket ger följande enkla teckentabell:

x		1	
$2(1-x)$	$+$	0	$-$
$(1+x^2)^2$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Funktionen har alltså lokalt (t.o.m. globalt) maximum i $x = 1$, men inga lokala minima.



Svar: Lokalt maximum $f(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$, vågräta asymptoter $y = \pi/2$ (då $x \to \infty$) och $y = -\pi/2$ (då $x \to -\infty$).

2. (a) $\dfrac{\sin 3x}{e^{2x}-1} = \dfrac{3}{2} \dfrac{\sin 3x}{3x} \dfrac{2x}{e^{2x}-1} \to \dfrac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{3}{2}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (b) $\dfrac{\sin 3x}{e^{2x}-1} = \underbrace{\sin 3x}_{\text{begränsad}} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{e^{2x}-1}}_{\to 0} \to 0$ då $x \to \infty$.

   (c) Nämnaren $e^{2x} - 1$ går mot -1 då $x \to -\infty$, medan täljaren saknar gränsvärde ($\sin 3x$ oscillerar mellan -1 och $+1$). Därmed saknar även kvoten gränsvärde då $x \to -\infty$ (godtyckligt långt till vänster på tallinjen finns det punkter där kvoten är nära 1 och andra punkter där den är nära -1).

   Svar: (a) $\dfrac{3}{2}$ (b) 0 (c) Gränsvärde saknas.

3. (a) Det betyder att $3 \in D_f$ och $f(x) \to f(3)$ då $x \to 3$. (Eller, som specialfall, att 3 är en isolerad punkt i D_f; i detta fall är gränsvärdet $\lim_{x\to 3} f(x)$ ej definierat, men f räknas ändå som kontinuerlig.)

   (b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$.

   (c) Integranden är kontinuerlig, så enligt analysens huvudsats är $f'(x) = \dfrac{1}{\ln(2+x^2)}$.

4. Vi delar upp i tre fall:

   - Om $a = 0$ så är $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a} = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$.
   - Om $a > 0$ sätter vi $b = \sqrt{a}$ och får $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a} = \int \frac{dx}{x^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{1+(x/b)^2} = \frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b} + C$.
   - Om $a < 0$ sätter vi $c = \sqrt{-a}$ och får $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a} = \int \frac{dx}{x^2-c^2} = \frac{1}{2c}\int\left(\frac{1}{x-c} - \frac{1}{x+c}\right)dx = \frac{1}{2c}\ln\left|\frac{x-c}{x+c}\right| + C$.

   Svar: $-\dfrac{1}{x}+C$ om $a = 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{a}}+C$ om $a > 0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{-a}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{-a}}{x+\sqrt{-a}}\right|+C$ om $a < 0$.

5. Primitiv funktion (för $x > 0$):

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2}\arctan x\,dx &= \frac{-1}{x}\arctan x - \int \frac{-1}{x}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{-\arctan x}{x} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{-\arctan x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\
&= \frac{-\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{x^{-2}+1} + C.
\end{aligned}$$

   Detta ger

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx &= \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{\omega}\arctan\omega + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\omega^{-2}+1}\right) + \frac{\arctan 1}{1} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} \\
&= -0\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{0+1} + \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

   Svar: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}$.

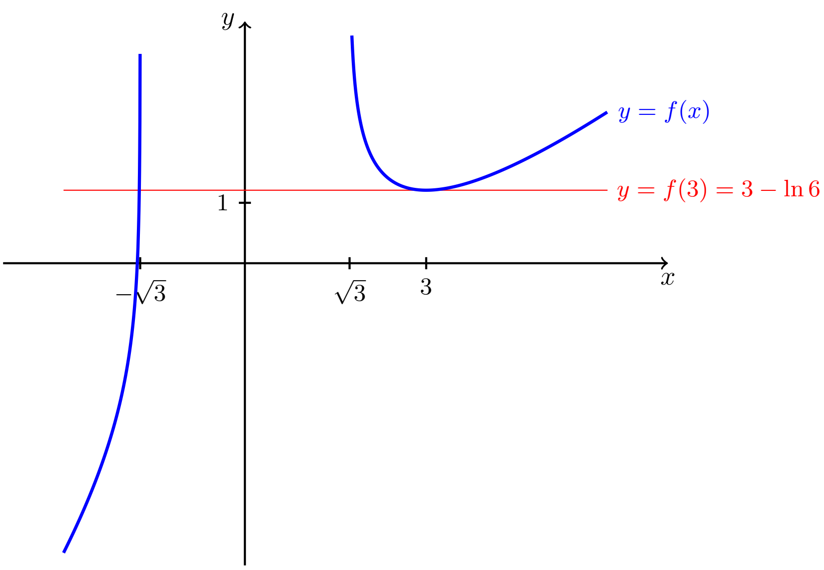
6. Eftersom $c > 0$ enligt förutsättning så är ekvationen $\frac{\ln(c(x^2-3))}{x} = 1$ bara meningsfull om $x^2 - 3 > 0$, dvs. om $|x| > \sqrt{3}$. För dessa x kan vi skriva om ekvationen som $\ln c + \ln(x^2 - 3) = x$, alltså

$$\underbrace{x - \ln(x^2 - 3)}_{f(x)} = \ln c.$$

Vi döper vänsterledet till $f(x)$. Funktionen f är definierad för $|x| > \sqrt{3}$ och har där derivatan $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2-3} = \frac{(x-3)(x+1)}{x^2-3}$, vilket ger följande teckentabell:

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		3	
$x-3$	$-$		irrelevant		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		irrelevant		$+$		$+$
x^2-3	$+$	0	irrelevant	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	ej def.	ej def.	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	ej def.	ej def.	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Gränsvärden: $f(x) \to \infty$ då $x \to (\sqrt{3})^+$ och då $x \to (-\sqrt{3})^-$ (eftersom logaritmtermen går mot $-\infty$), samt $f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x^2-3)}{x}\right) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$ (eftersom $\frac{\ln(x^2-3)}{x} = \frac{2\ln|x| + \ln(1-3x^{-2})}{x} = 2\frac{\ln|x|}{x} + \frac{1}{x}\ln(1 - 3x^{-2}) \to 2 \cdot 0 + 0 \cdot \ln 1 = 0$, enligt ett standardgränsvärde).



Ur grafen avläser vi att ekvationen $f(x) = \ln c$ har exakt två lösningar om och endast om $\ln c = f(3) = 3 - \ln 6$, vilket ger $c = e^3/6$.

Svar: $c = e^3/6$.

7. Funktionen $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[-1,1]$ och deriverbar på det öppna intervallet $]-1,1[$, med derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Detta betyder att medelvärdessatsen för derivator kan tillämpas på intervallet $[c,1]$, där $-1 \le c < 1$. Vad den säger är att

$$\frac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(\xi(c)) \qquad (*)$$

för något $\xi(c) \in \,]c,1[$.

Kom ihåg att vänsterderivatan $f'_-(1)$ definieras som $\lim_{c\to 1^-} \frac{f(c)-f(1)}{c-1}$ (om gränsvärdet existerar). Eftersom $c < \xi(c) < 1$ så ger instängningsregeln att $\xi(c) \to 1^-$ om $c \to 1^-$, och vi får därför

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 1^-} \frac{f(c)-f(1)}{c-1} &= \left[\text{ enligt } (*) \right] = \lim_{c\to 1^-} f'(\xi(c)) \\ &= \left[\begin{array}{c} x = \xi(c) \to 1^- \\ \text{då } c \to 1^- \end{array}\right] = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0,\end{aligned}$$

så vänsterderivatan $f'_-(1)$ existerar och är lika med $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$.