Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2014-04-23 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Hur många olika lösningar har ekvationen $\ln\left(1+x^2\right) + \dfrac{5}{1+x^2} = 4$?

2. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^4 \arctan\sqrt{x}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x|\, dx$.

3. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{e^{2x}-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+2x}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1-3x)^{1/2x}$.

4. Beräkna $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{4x(\ln x)^2 - x}\, dx$

5. En axelparallell rektangel har sina hörn på ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (där $a > 0$, $b > 0$). Vad är den största area en sådan rektangel kan ha?

6. (a) Definiera vad som menas med att f är strängt växande på intervallet I.

   (b) Visa att om $g'(x) > 0$ på det öppna intervallet I så är g strängt växande på I.

   (c) Antag att funktionen h har egenskapen att $h(x+1) > h(x)$ för alla x. Måste h vara strängt växande? Ge bevis eller motexempel.

7. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2}\, e^{-k/n}$.

Lösningsskisser för TATA41 2014-04-23

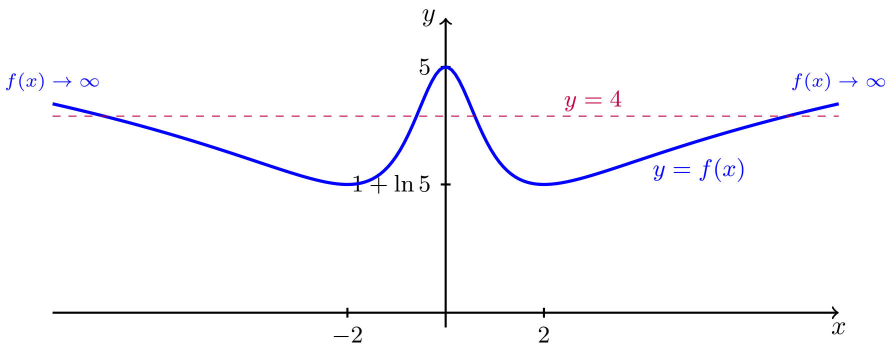
1. Sätt $f(x) = \ln(1 + x^2) + \frac{5}{1+x^2}$ för $x \in \mathbf{R}$. Vi söker antalet lösningar till ekvationen $f(x) = 4$. Notera att f är en jämn funktion, samt att $f(x) \to \infty$ då $x \to \pm\infty$. Derivatan är

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{5 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(x+2)(x-2)}{(1+x^2)^2},$$

vilket ger följande teckentabell:

x		-2		0		2	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(1+x^2)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Funktionen har alltså lokalt maximum $f(0) = 5 > 4$ och lokalt minimum $f(\pm 2) = 1 + \ln 5 < 4$ (eftersom $e < 5 < e^2$ så är ju $1 < \ln 5 < 2$). Nu kan vi rita grafen $y = f(x)$ och avläsa att den skär linjen $y = 4$ fyra gånger:



Svar: Ekvationen har fyra lösningar.

2. (a) Variabelbytet $t = \sin x$ ger $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2}(1 - \sin^2 x)\cos x\,dx = \int_0^1 (1-t^2)\,dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

   (b) Variabelbytet $t = \sqrt{x}$, följt av partiell integration, ger $\int_0^4 \arctan\sqrt{x}\,dx = \int_0^2 2t \arctan t\,dt = [t^2 \arctan t]_0^2 - \int_0^2 t^2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = 4\arctan 2 - \int_0^2 (1 - \frac{1}{1+t^2})\,dt = 4\arctan 2 - [t - \arctan t]_0^2 = 5\arctan 2 - 2$.

   (c) Innan man försöker beräkna primitiv funktion måste man göra sig av med beloppstecknen, med hjälp av falluppdelning eller på annat sätt. Enklast är kanske att utnyttja symmetrin:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |x|\,dx &= 2\int_0^2 |x|\,dx \quad \text{(integranden } |x| \text{ är en jämn funktion)}\\ &= 2\int_0^2 x\,dx \quad (|x| = x \text{ i integrationsintervallet } 0 \le x \le 2)\\ &= [x^2]_0^2 = 4\end{aligned}$$

   (Man kan även lätt se svaret geometriskt; arean under grafen utgörs ju helt enkelt av två trianglar.)

Svar: (a) $\dfrac{2}{3}$ (b) $5\arctan 2 - 2$ (c) 4.

3. (a) $\frac{\sin 5x}{e^{2x}-1} = \frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{5x}\frac{2x}{e^{2x}-1} \to \frac{5}{2}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{2}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (b) Variabelbytet $x = -t$ ger $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+2x} = \sqrt{t^2-t} - \sqrt{t^2-2t} = \frac{(t^2-t)-(t^2-2t)}{\sqrt{t^2-t}+\sqrt{t^2-2t}} = \left[\text{för } t > 2\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+\sqrt{1-\frac{2}{t}}} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ då $t \to \infty$, dvs. då $x \to -\infty$.

   (c) $(1-3x)^{1/2x} = \left[a^b = e^{b\ln a}\right] = \exp\left(-\frac{3}{2}\frac{\ln(1-3x)}{-3x}\right) \to \exp\left(-\frac{3}{2}\cdot 1\right)$ då $x \to 0$, enligt ett standardgränsvärde.

Svar: (a) $\dfrac{5}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $e^{-3/2}$.

4. Variabelbytet $t = \ln x$ (med $dt = \frac{dx}{x}$, $t = 1$ då $x = e$, samt $t \to \infty$ då $x \to \infty$) ger

$$\begin{aligned}\int_e^\infty \frac{1}{4(\ln x)^2 - 1}\frac{dx}{x} &= \int_1^\infty \frac{dt}{4t^2-1} = \int_1^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2t-1} - \frac{1}{2t+1}\right) dt\\ &= \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ln|2t-1|}{2} - \frac{\ln|2t+1|}{2}\right)\right]_1^\omega\\ &= \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right|\right]_1^\omega\\ &= \frac{1}{4}\lim_{\omega\to\infty}\left(\ln\left(\frac{1-\frac{1}{2\omega}}{1+\frac{1}{2\omega}}\right) - \ln\frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{4}(\ln 1 - \ln\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}\ln 3.\end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{\ln 3}{4}$.

5. Koordinaterna för det rektangelhörn som ligger i första kvadranten kan skrivas $(x, y) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, där $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Då blir rektangelns area $A(\varphi) = 4 \cdot a\cos\varphi \cdot b\sin\varphi = 2ab\sin 2\varphi$, vilket uppenbart som mest blir $2ab$ (då $\varphi = \frac{\pi}{4}$).

   Svar: $2ab$.

   (Alternativ metod: Skriv hörnets koordinater som $(x, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2})$ och gör en vanlig funktionsundersökning av arean $A(x) = 4 \cdot x \cdot \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ för $0 \le x \le a$; största värdet fås då $x = a/\sqrt{2}$.)

6. (a) f sägs vara strängt växande på intervallet I ifall olikheten $f(x_1) < f(x_2)$ gäller för alla par av punkter (x_1, x_2) sådana att $x_1 < x_2$ och $x_1, x_2 \in I$.

   (b) Låt x_1 och x_2 vara två godtyckliga punkter i I med $x_1 < x_2$. Eftersom g är deriverbar på I så är g förstås deriverbar på delintervallet $]x_1, x_2[$, samt kontinuerlig i punkterna x_1 och x_2. Därmed är förutsättningarna uppfyllda för att vi ska kunna tillämpa medelvärdessatsen för derivator på intervallet $[x_1, x_2]$; enligt denna sats finns det en punkt $\xi \in]x_1, x_2[$ sådan att $g'(\xi) = \dfrac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$. Enligt förutsättning är $g'(x) > 0$ för alla $x \in I$, alltså gäller i synnerhet att $g'(\xi) > 0$, vilket medför att

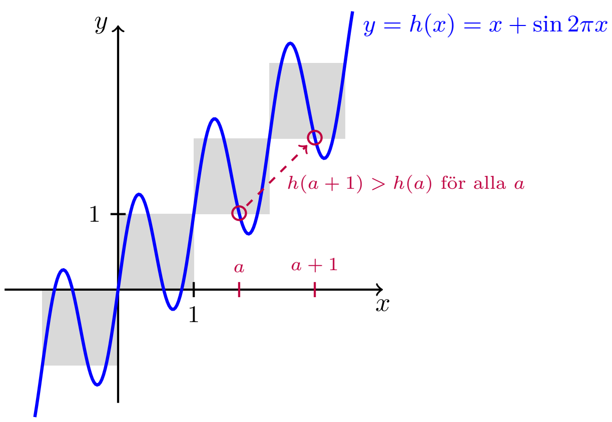
$$g(x_2) - g(x_1) = \underbrace{g'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0,$$

   dvs. $g(x_2) > g(x_1)$, vilket skulle visas.

   (c) Nej, h måste *inte* vara strängt växande. En funktion med egenskapen $h(x+1) = h(x) + 1$ för alla x (och därmed $h(x+1) > h(x)$ för alla x) kan konstrueras genom att man definierar $h(x)$ helt godtyckligt (t.ex. avtagande) för $0 \le x < 1$ och sedan sätter $h(n + x) = n + h(x)$ för $n \in \mathbf{Z}$ och $0 \le x < 1$. Ett enkelt konkret exempel är

$$h(x) = x + \sin 2\pi x,$$

   som uppfyller $h(x+1) = h(x) + 1 > h(x)$, men inte är strängt växande på $\mathbf{R}$, vilket man ser på att derivatan $h'(x) = 1 + 2\pi\cos 2\pi x$ är negativ i vissa intervall (den oscillerar ju mellan $1 - 2\pi < 0$ och $1 + 2\pi > 0$).



7. Fixera ett godtyckligt heltal $n \geq 1$ och låt $f(x) = x\,e^{-x/n}$. Från $f'(x) = (1 - \frac{x}{n})e^{-x/n}$ ser man att f är växande på $[0, n]$ och avtagande på $[n, \infty[$, så

$$\int_0^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(x)\,dx + f(n)$$

och

$$\int_n^{2n} f(x)\,dx - f(n) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \leq \int_n^{2n} f(x)\,dx.$$

Ledvis addition av olikheterna ger

$$\int_0^{2n} f(x)\,dx - f(n) \leq \sum_{k=1}^{2n} f(k) \leq \int_0^{2n} f(x)\,dx + f(n).$$

Om vi beräknar $\int_0^{2n} x\,e^{-x/n}dx = [-n(x+n)e^{-x/n}]_0^{2n} = (1 - 3e^{-2})n^2$ och dividerar alla leden med n^2 har vi alltså visat att följande olikhet gäller för varje $n \geq 1$:

$$\frac{(1 - 3e^{-2})n^2 - ne^{-1}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} k\,e^{-k/n} \leq \frac{(1 - 3e^{-2})n^2 + ne^{-1}}{n^2},$$

dvs.

$$1 - 3e^{-2} - \frac{e^{-1}}{n} \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2}\,e^{-k/n} \leq 1 - 3e^{-2} + \frac{e^{-1}}{n}.$$

Låt nu $n \to \infty$. Båda ytterleden går då mot $1 - 3e^{-2}$, så enligt instängningsregeln gör också summan i mitten det.

Svar: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2}\,e^{-k/n} = 1 - 3e^{-2}.$

(Om man känner till Riemannsummor (överkurs) kan man istället argumentera på följande mycket enklare sätt: eftersom summan

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n} e^{-k/n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{2n} g(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

är en Riemannsumma för $g(x) = xe^{-x}$ på intervallet $[0, 2]$ med indelningspunkterna $x_k = \frac{k}{n}$, så konvergerar den mot integralen $\int_0^2 g(x)\,dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^2 = 1 - 3e^{-2}$ då $n \to \infty$.)