Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2014-03-18 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Låt $f(x) = (3-4x)e^{-2x^2}$ för $x \in \mathbf{R}$. Bestäm värdemängden V_f.

2. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{4x^2-\pi^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(2\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(2+3x^4)\Big)$

3. Beräkna följande primitiva funktioner:

   (a) $\displaystyle\int \sin 2x \cos x \, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\, dx$

4. (a) Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i punkten a.
   (b) Definiera vad som menas med att f är deriverbar i punkten a.
   (c) Definiera vad som menas med att f är strängt växande på intervallet I.

5. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^3}\, dx$.

6. Bestäm (för alla värden på konstanten $k \in \mathbf{R}$) antalet reella lösningar till ekvationen
$$\sqrt{x^2-1} = k + 4\arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$$

7. Visa att $g = f^{-1}$, där
$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos t} \qquad \text{för } |x| < \frac{\pi}{2}$$
och
$$g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t} \qquad \text{för } x \in \mathbf{R}.$$
(Vi påminner om definitionen av cosinus hyperbolicus: $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.)

Lösningsskisser för TATA41 2014-03-18

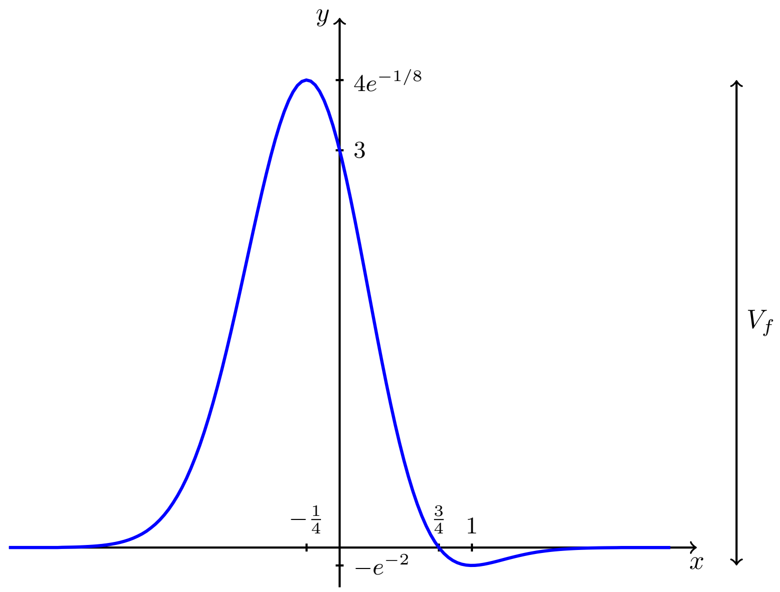
1. Vi kan notera att $f(x) = (3-4x)e^{-2x^2}$ har ett uppenbart nollställe i $x = \frac{3}{4}$, och är positiv till vänster om denna punkt och negativ till höger. Derivatan är

$$f'(x) = -4e^{-2x^2} + (3-4x)(-4x)e^{-2x^2} = 16(x-1)(x+\tfrac{1}{4})e^{-2x^2},$$

vilket ger följande teckentabell:

x		$-\frac{1}{4}$		1	
$x+\frac{1}{4}$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$16\,e^{-2x^2}$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Funktionen har alltså lokalt maximum $f(-\frac{1}{4}) = 4\,e^{-1/8}$ och lokalt minimum $f(1) = -e^{-2}$. Vidare ser vi att $f(x) = \frac{1}{2x}(\frac{3}{x} - 4) \cdot \dfrac{2x^2}{e^{2x^2}} \to 0 \cdot (-4) \cdot 0 = 0$ då $x \to \pm\infty$ (enligt standardgränsvärdet $t/e^t \to 0$ då $t = 2x^2 \to \infty$). Nu har vi all information vi behöver för att rita grafen och avläsa värdemängden:



(Funktionen antar naturligtvis alla mellanliggande värden, eftersom den är kontinuerlig.)

Svar: $V_f = [-e^{-2}, 4\,e^{-1/8}]$.

2. (a) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3} \to -\frac{1}{5}$ då $x \to 2$.

   (b) Variabelbytet $t = x - \frac{\pi}{2}$ ger $\frac{\cos x}{4x^2-\pi^2} = \frac{\cos(t+\frac{\pi}{2})}{4(t+\frac{\pi}{2})^2-\pi^2} = \frac{-\sin t}{4t^2+4\pi t} = \frac{-1}{4t+4\pi}\,\frac{\sin t}{t} \to \frac{-1}{4\pi} \cdot 1$ då $t \to 0$ (dvs. då $x \to \frac{\pi}{2}$), enligt ett standardgränsvärde.

   (c) $2\ln x - \frac{1}{2}\ln(2+3x^4) = -\frac{1}{2}\ln\frac{2+3x^4}{x^4} = -\frac{1}{2}\ln(\frac{2}{x^4}+3) \to -\frac{1}{2}\ln(0+3)$ då $x \to \infty$ (eftersom logaritmfunktionen är kontinuerlig).

   Svar: (a) $-\frac{1}{5}$ (b) $-\frac{1}{4\pi}$ (c) $-\frac{\ln 3}{2}$.

3. (a) Det finns flera sätt. Sinus av dubbla vinkeln ger $\int \sin 2x \cos x\,dx = \int 2\sin x \cos^2 x\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x + C$. Omskrivning av produkten till en summa ger $\int \sin 2x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 3x + \sin x)dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C$. Att partialintegrera två gånger och lösa ut den sökta primitiven ger $\int \sin 2x \cos x\,dx = -\frac{1}{3}(\sin 2x \sin x + 2\cos 2x \cos x) + C$. (Alla tre svaren är lika, med samma C till och med.)

   (b) Variabelbytet $t = x+2$ (med $dt = dx$) ger $\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{t-3}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+1} - 3\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 3\arctan t + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 3\arctan(x+2) + C$.

   (c) Variabelbytet $t = \sqrt{x}$ (med $x = t^2$ och $dx = 2t\,dt$) ger $\int \arctan\sqrt{x}\,dx = \int 2t\arctan t\,dt = t^2\arctan t - \int t^2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = t^2 \arctan t - \int (1 - \frac{1}{1+t^2})\,dt = t^2\arctan t - t + \arctan t + C = (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.

4. (a) f sägs vara kontinuerlig i punkten a ifall $a \in D_f$ och $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$ (eller om a är en isolerad punkt i D_f).

   (b) f sägs vara deriverbar i punkten a ifall f är definierad i en omgivning av a och gränsvärdet $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existerar (ändligt).

   (c) f sägs vara strängt växande på intervallet I ifall $f(x) < f(y)$ närhelst $x \in I$, $y \in I$ och $x < y$.
   (Observera att begreppet derivata *inte* nämns i definitionen av strängt växande.)

5. Partiell integration och sedan partialbråksuppdelning ger

$$
\begin{aligned}
\int_1^\omega \frac{\ln(1+x)}{x^3}\,dx &= \left[\frac{-1}{2x^2}\ln(1+x)\right]_1^\omega - \int_1^\omega \frac{-1}{2x^2}\,\frac{1}{1+x}\,dx \\
&= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln(1+\omega)}{2\omega^2} + \frac{1}{2}\int_1^\omega \left(\frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x} + \frac{1}{1+x}\right)dx \\
&= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln\omega + \ln(1+\frac{1}{\omega})}{2\omega^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x} - \ln x + \ln(1+x)\right]_1^\omega \\
&= -\left(\frac{\ln\omega}{2\omega^2} + \frac{1}{2\omega^2}\ln\left(1+\frac{1}{\omega}\right)\right) - \frac{1}{2\omega} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\omega}\right) + \frac{1}{2} \\
&\to -(0 + 0\cdot\ln 1) - 0 + \frac{1}{2}\cdot\ln 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

då $\omega \to \infty$ (enligt standardgränsvärdet $\frac{\ln\omega}{\omega^\alpha} \to 0$ för $\alpha > 0$ och för att logaritmfunktionen är kontinuerlig). (Som rimlighetskontroll kan man förresten notera att svaret måste bli *positivt* eftersom $\frac{\ln(1+x)}{x^3} > 0$ när $x \in [1, \infty[$.)

Svar: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$.

6. Vi ska räkna antalet lösningar till ekvationen $f(x) = k$, där $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 4 \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ för $|x| \geq 1$. Derivatan är

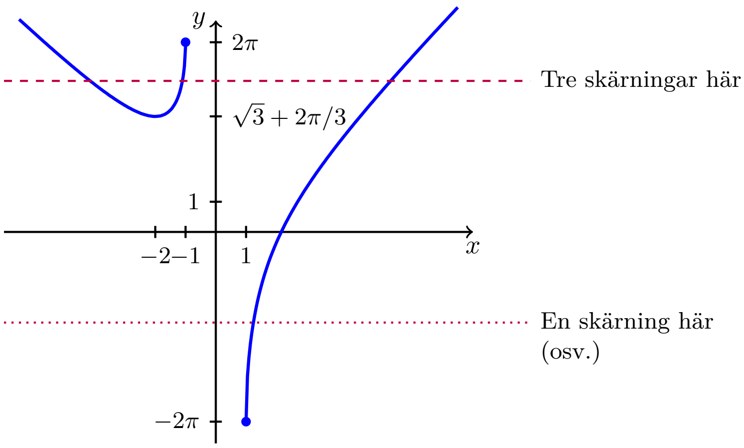
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{4}{\sqrt{1-(1/x)^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{4\,|x|}{\sqrt{x^2-1}} \right) \frac{1}{x^2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1, \\ \dfrac{x^2-4}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1. \end{cases}$$

För $x > 1$ gäller uppenbart $f'(x) > 0$. Funktionen f är kontinuerlig ända ut i ändpunkten $x = 1$, även om derivatan f' är odefinierad där (grafens tangent är lodrät), så på intervallet $[1, \infty[$ är f strängt växande, med minsta värde $f(1) = 0 - 4 \arcsin 1 = -2\pi$. I fallet $x < -1$ faktoriserar vi $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ och gör teckentabell:

x		-2		-1
$x+2$	$-$	0	$+$	
$x-2$	$-$		$-$	
x	$-$		$-$	
$\sqrt{x^2-1}$	$+$		$+$	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.

Insättning ger att det lokala minimivärdet är $f(-2) = \sqrt{3} - 4\arcsin(-\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + 2\pi/3$ och värdet i ändpunkten är $f(-1) = 0 - 4\arcsin(-1) = 2\pi$. Vidare gäller att $f(x) = |x|\sqrt{1-(1/x)^2} - 4\arcsin(1/x) \to \infty$ då $x \to \pm\infty$. (Vi ser att $f(x) \approx |x|$ när $|x|$ är stort, vilket kan vara användbart när man ritar grafen.) Antalet lösningar till ekvationen $f(x) = k$ kan nu avläsas som antalet skärningar mellan grafen $y = f(x)$ och den horisontella linjen $y = k$, för olika värden på k:



Svar: Inga lösningar om $k < -2\pi$, en lösning om $-2\pi \leq k < \sqrt{3} + 2\pi/3$, två lösningar om $k = \sqrt{3} + 2\pi/3$ eller $k > 2\pi$, och tre lösningar om $\sqrt{3} + 2\pi/3 < k \leq 2\pi$.

7. Både f och g är inverterbara, eftersom de är strängt växande – deras derivator $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$ och $g'(x) = \frac{1}{\cosh x}$ är ju båda positiva (i de angivna intervallen). Vi beräknar $g(x)$ (som för övrigt kallas *Gudermanns funktion*):

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\cosh t} = \int_0^x \frac{dt}{\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})} = \int_0^x \frac{2\,e^t\,dt}{1 + (e^t)^2} \\ &= \Big[2 \arctan e^t\Big]_0^x = 2 \arctan e^x - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Uträkningen

$$y = 2 \arctan e^x - \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbf{R} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad |y| < \frac{\pi}{2}$$

visar att inversen till g är

$$g^{-1}(x) = \ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Vi ser att $g^{-1}(0) = \ln \tan \frac{\pi}{4} = \ln 1 = 0$ (såklart, eftersom $g(0) = \int_0^0 \frac{dt}{\cosh t} = 0$) och att derivatan av g^{-1} är

$$\begin{aligned} (g^{-1})'(x) &= \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Alltså är $g^{-1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\cos t} = f(x)$, dvs. f och g är varandras inverser, vilket skulle visas.