Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2014-01-18 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 2\ln x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - 3\arctan x$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-3x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{e^{2x}-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2^x + x^{10})}{e^{1+\ln x}}$.

3. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ (b) $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x + \cos x}$ (c) $e^{-2x}\sin x$.

4. Du ska tillverka en låda (utan lock) med kvadratisk botten och rektangulära sidor. Materialet till botten kostar 400 kr/m^2 och materialet till sidoytorna kostar 25 kr/m^2. Lådans totala volym ska vara 1 m^3. Vad är den lägsta materialkostnaden för att bygga en sådan låda?

5. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^t}{e^{4t}-1}\,dt$

6. För vilka värden på a existerar $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\arctan k}{n^a}$? Bestäm gränsvärdet för dessa a.

7. Funktionen f är kontinuerlig och $f(x) \geq 0$ då $a \leq x \leq b$. Visa att det finns minst ett tal $\xi \in [a,b]$ sådant att $\displaystyle\int_a^b x\,f(x)\,dx = b\int_a^\xi f(x)\,dx + a\int_\xi^b f(x)\,dx$.

Lösningsskisser för TATA41 2014-01-18

1. Funktionen $f(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - 3\arctan x$ är definierad för $x > 0$. Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot eftersom $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$ (på grund av termen $2\ln x$). Derivatan är

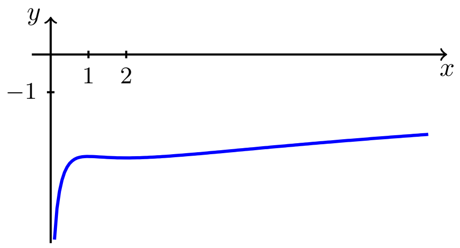
$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{1+x^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(1+x^2)},$$

vilket ger följande teckentabell:

x	0		1		2	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$
$x(1+x^2)$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Funktionen har alltså lokalt maximum $f(1) = -\frac{1}{2}\ln 2 - 3\pi/4$ (uppenbart negativt) och lokalt minimum $f(2) = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 - 3\arctan 2$.

Genom att skriva $f(x) = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 3\arctan x = \ln x - \ln\sqrt{x^{-2}+1} - 3\arctan x$ ser man att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ (eftersom $\ln x \to \infty$; de andra termerna går mot $-0 - 3\pi/2$). Speciellt saknar funktionen vågrät asymptot. (Tillväxten är dock ganska långsam; vi har $f(x) \approx \ln x - 3\pi/2$ för stora x, så f blir inte ens positiv förrän lite innan $x = e^{3\pi/2} \approx 111$; numerisk lösning på dator visar att nollstället ligger vid $x \approx 108$.)



Svar: Funktionen har lokalt maximum för $x = 1$ och lokalt minimum för $x = 2$. Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot. Vågrät asympot saknas ($f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$).

2. (a) Genom att förlänga med konjugatuttrycket finner man att $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}} = \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}}{(x^2+2x)-(x^2-3x)} = [\text{för } x > 0] = \frac{\sqrt{1+2/x}+\sqrt{1-3/x}}{5} \to \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5}$ då $x \to \infty$.

   (b) $\frac{\ln(1-3x)}{e^{2x}-1} = -\frac{3}{2}\,\frac{\ln(1-3x)}{-3x}\,\frac{2x}{e^{2x}-1} \to -\frac{3}{2}\cdot 1 \cdot 1 = -\frac{3}{2}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (c) $\frac{\ln(2^x+x^{10})}{e^{1+\ln x}} = \frac{\ln(2^x(1+x^{10}/2^x))}{xe} = \frac{x\ln 2 + \ln(1+x^{10}/2^x)}{xe} = \frac{\ln 2}{e} + \frac{1}{xe}\ln(1+\frac{x^{10}}{2^x}) \to \frac{\ln 2}{e} + 0\cdot\ln 1 = \frac{\ln 2}{e}$ då $x \to \infty$, enligt standardgränsvärden.

   Svar: (a) $\frac{2}{5}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) $\frac{\ln 2}{e}$.

3. (a) Partiell integration ger $\int x^{-1/2} \ln x \, dx = 2x^{1/2} \ln x - \int 2x^{1/2} x^{-1} \, dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C$.

   (b) Variabelbytet $t = \cos x$ (med $dt = -\sin x \, dx$) och partialbråksuppdelning ger $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x + \cos x} = \int \frac{-dt}{t(1+t^2)} = \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x) - \ln |\cos x| + C$.

   (c) Standardmetoder ger $\int e^{-2x} \sin x \, dx = -\frac{1}{5} e^{-2x} (2 \sin x + \cos x) + C$. (Det demonstreras i läroboken hur man gör med upprepad partiell integration, med hjälp av den komplexa exponentialfunktionen, eller med en ansats.)

4. Om bottenkvadratens sidlängd är x m och höjden är y m, så är lådans volym $x^2 y$ m^3, och materialkostnaden blir $400x^2 + 4 \cdot 25xy$ kr. Villkoret att volymen ska vara 1 m^3 framtvingar $y = 1/x^2$, vilket insatt i uttrycket för kostnaden ger den funktion som vi ska minimera, $f(x) = 400x^2 + 100/x$ (definierad för $x > 0$ såklart). Derivatan är $f'(x) = 800x - 100/x^2 = 100(8x^3 - 1)/x^2$. (Om man strikt följer standardproceduren så faktoriserar man $8x^3 - 1$ ytterligare, men eftersom x^3 är strängt växande så kan man ju också enkelt se att $8x^3 - 1$ växlar tecken vid $x = 1/2$.) Teckentabell:

x	0		$1/2$	
$8x^3 - 1$		$-$	0	$+$
x^2		$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

   Av detta ser man att det lokala minimivärdet $f(1/2) = 300$ också är ett globalt minimum. (Vi kan även notera gränsvärdena $f(x) \to \infty$ då $x \to 0^+$ och då $x \to \infty$. Största värde saknas alltså, så man kan bygga en godtycklig dyr låda ifall man skulle ha lust med det!)

   Svar: 300 kr (då kvadratens sidlängd är 1/2 m och höjden är 4 m).

5. Primitiv funktion beräknas med variabelbytet $x = e^t$ (och $dx = e^t \, dt$) följt av partialbråksuppdelningen $\frac{1}{x^4-1} = \frac{1/2}{x^2-1} - \frac{1/2}{x^2+1} = \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} - \frac{1/2}{x^2+1}$. Detta ger

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{e^t}{e^{4t} - 1} \, dt = \int_e^\infty \frac{dx}{x^4 - 1} \\
&= \lim_{\omega \to \infty} \left[\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x \right]_e^\omega \\
&= \lim_{\omega \to \infty} \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - 1/\omega}{1 + 1/\omega} \right| - \frac{1}{2} \arctan \omega \right) - \left(\frac{1}{4} \ln \frac{e-1}{e+1} - \frac{1}{2} \arctan e \right) \\
&= 0 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \ln \frac{e-1}{e+1} + \frac{1}{2} \arctan e.
\end{aligned}$$

   Svar: $\frac{1}{2} \arctan e + \frac{1}{4} \ln \frac{e+1}{e-1} - \frac{\pi}{4}$.

6. Vi uppskattar summan $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \arctan k$ med hjälp av integralen $I_n = \int_0^{2n} \arctan x \, dx$. Eftersom $\arctan x$ är växande så ser man (med hjälp av den vanliga figuren) att

$$I_n \leq S_n \leq I_n + \arctan 2n.$$

Knepet att skjuta in en etta och partialintegrera ger oss $I_n = 2n \arctan 2n - \frac{1}{2} \ln(1 + 4n^2)$. Sätt in detta i dubbelolikheten ovan, och dividera alla led med n^a för att i mitten få summan som uppgiften handlade om:

$$\begin{aligned} n^{1-a} \left(2 \arctan 2n - \frac{\ln(1+4n^2)}{2n} \right) &\leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{\arctan k}{n^a} \\ &\leq n^{1-a} \left((2 + n^{-1}) \arctan 2n - \frac{\ln(1+4n^2)}{2n} \right). \end{aligned}$$

Parenteserna i ytterleden går båda mot $2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$ då $n \to \infty$ (ty $\frac{\ln(1+4n^2)}{2n} = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2n} \ln(n^{-2} + 4) \to 0 + 0 \cdot \ln 4$ enligt ett standardgränsvärde), medan den ytterligare faktorn n^{1-a} går mot oändligheten om $a < 1$, mot ett om $a = 1$, och mot noll om $a > 1$. Ytterleden går alltså i de tre fallen mot ∞, π respektive 0, och enligt instängningsregeln måste summan göra detsamma.

Svar: Gränsvärdet existerar (i egentlig mening) om och endast om $a \geq 1$, och det är π ifall $a = 1$ och 0 ifall $a > 1$.

7. Antag att $a \leq x \leq b$. Då är $f(x)$ **ickenegativ** enligt förutsättning, så ifall vi multiplicerar varje led med $f(x)$ ska vi **behålla** olikheternas riktning: $a\,f(x) \leq x\,f(x) \leq b\,f(x)$. Ledvis integration från a till b ger därmed

$$a \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b x\,f(x)\,dx \leq b \int_a^b f(x)\,dx.$$

Inspirerade av vad som står i högerledet i påståendet som ska bevisas definierar vi nu hjälpfunktionen

$$g(t) = b \int_a^t f(x)\,dx + a \int_t^b f(x)\,dx, \qquad \text{för } t \in [a, b].$$

Då är $g(a) = 0 + a \int_a^b f(x)\,dx$ och $g(b) = b \int_a^b f(x)\,dx + 0$, så vad dubbelolikheten ovan säger är att talet $C = \int_a^b x\,f(x)\,dx$ (som står i vänsterledet i påståendet som ska bevisas) ligger mellan talen $g(a)$ och $g(b)$:

$$g(a) \leq C \leq g(b).$$

Funktionen g är **kontinuerlig** (den är ju t.o.m. *deriverbar* enligt analysens huvudsats, eftersom f enligt förutsättning är kontinuerlig). Därmed kan vi åberopa **satsen om mellanliggande värde**, som säger att det finns ett tal $\xi \in [a, b]$ sådant att $C = g(\xi)$, och detta var ju precis vad som skulle visas.