Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2013-08-29 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \arctan(x-1) - 2\ln(x+1)$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{e^{2x}-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(3\cdot 2^x + x)^2}{4^x - \ln x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x+6}{x^2+x-6}$.

3. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\left(x^2+1\right)e^{2x}$ (b) $\dfrac{x^3+1}{x-1}$ (c) $(3+\cos x)^2 \sin 2x$.

4. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

5. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^t - 1}{e^{2t} + 2e^t + 2}\,dt$.

6. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 e^{-k} < \frac{17}{e^2}$ för alla heltal $n \geq 1$.

7. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{n+1} + (n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^n$.

Lösningsskisser för TATA41 2013-08-29

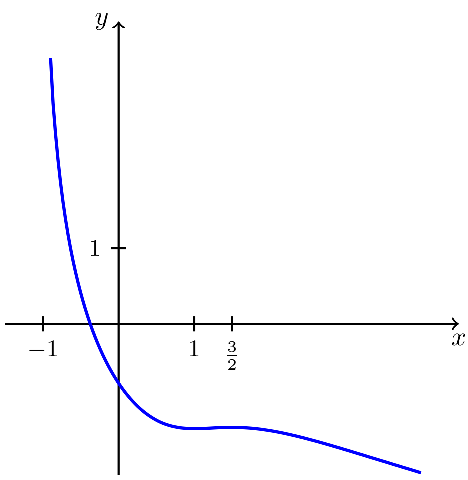
1. Funktionen $f(x) = \arctan(x-1) - 2\ln(x+1)$ är definierad för $x > -1$. Linjen $x = -1$ är en lodrät asymptot eftersom $f(x) \to \infty$ då $x \to (-1)^+$. Vågräta asymptoter saknas, eftersom $f(x) \to -\infty$ då $x \to \infty$. Derivatan är

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} - \frac{2}{x+1} = \frac{-(x-1)(2x-3)}{\big(1+(x-1)^2\big)(x+1)},$$

vilket ger följande teckentabell:

x	-1		1		$\frac{3}{2}$	
$-(x-1)$		$+$	0	$-$		$-$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$
$\big(1+(x-1)^2\big)(x+1)$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Funktionen har alltså lokalt minimum $f(1) = -2\ln 2$ och lokalt maximum $f(\frac{3}{2}) = \arctan\frac{1}{2} - 2\ln\frac{5}{2}$ (vilket är negativt, eftersom $\arctan\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ och $2\ln\frac{5}{2} > 2\ln 2 = \ln 4 > 1$).



2. (a) $\frac{\ln(1-3x)}{e^{2x}-1} = -\frac{3}{2}\frac{\ln(1-3x)}{-3x}\frac{2x}{e^{2x}-1} \to -\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 = -\frac{3}{2}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (b) $\frac{(3\cdot 2^x+x)^2}{4^x-\ln x} = \frac{(3+\frac{x}{2^x})^2}{1-\frac{\ln x}{4^x}} \to \frac{(3+0)^2}{1-0} = 9$ då $x \to \infty$, enligt standardgränsvärden.

   (c) När $x \to 2^{\pm}$ i uttrycket $\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-6}$ så går täljaren mot 20 och nämnaren mot $0^{\pm}$. Högergränsvärdet blir därför $+\infty$ och vänstergränsvärdet $-\infty$; de är olika, så uttrycket saknar gränsvärde då $x \to 2$.

   Svar: (a) $-\frac{3}{2}$ (b) 9 (c) Gränsvärde saknas.

3. (a) Upprepade partiella integrationer ger $\int (x^2+1)e^{2x}dx = (x^2+1)\frac{e^{2x}}{2} - 2x\,\frac{e^{2x}}{4} + 2\,\frac{e^{2x}}{8} + C = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4})e^{2x} + C$.

   (b) Polynomdivision ger $\int \frac{x^3+1}{x-1}\,dx = \int (x^2+x+1+\frac{2}{x-1})dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln|x-1| + C$.

   (c) Variabelbytet $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$ ger $\int (3+\cos x)^2 \sin 2x\,dx = 2\int (3+\cos x)^2 \cos x \sin x\,dx = -2\int (3+t)^2\,t\,dt = -2\int (t^3+6t^2+9t)dt = -(\frac{1}{2}t^4 + 4t^3 + 9t^2) + C = -(\frac{1}{2}\cos^4 x + 4\cos^3 x + 9\cos^2 x) + C$.

4. Funktionen $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1} = x+1+\frac{4}{x-1}$ är definierad för $x \neq 1$ och har derivatan $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$:

x		-1		1		3	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Gränsvärden: $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$, samt $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 1^{\pm}$. Lokalt maximum $f(-1) = -2$, lokalt minimum $f(3) = 6$. Nu har vi den information vi behöver för att rita grafen och ur denna avläsa värdemängden V_f.

Svar: $V_f =]-\infty, -2] \cup [6, \infty[$.

5. Variabelbytet $x = e^t$, $dt = dx/x$, följt av partialbråksuppdelning, ger

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^t-1}{e^{2t}+2e^t+2}\,dt &= \int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,\frac{dx}{x} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(\frac{x+4}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(\frac{(x+1)+3}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{x}\right)dx \\
&= \lim_{\omega\to\infty} \left[\tfrac{1}{4}\ln(x^2+2x+2) + \tfrac{3}{2}\arctan(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln x\right]_1^\omega \\
&= \lim_{\omega\to\infty} \left[\tfrac{1}{4}\ln(1+\tfrac{2}{x}+\tfrac{2}{x^2}) + \tfrac{3}{2}\arctan(x+1)\right]_1^\omega \\
&= 0 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{4}\ln 5 - \tfrac{3}{2}\arctan 2.
\end{aligned}$$

Svar: $\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4}\ln 5 - \frac{3}{2}\arctan 2$.

6. Funktionen $f(x) = x^2e^{-x}$ är strängt avtagande på $[2, \infty[$, eftersom $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} < 0$ för $x > 2$. För $n \geq 3$ är summan $\sum_{k=3}^{n} f(k)$ därmed mindre än integralen $\int_2^n f(x)\,dx$ (lämpligen ritar man en figur för att se detta). Alltså:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(k) &= f(1) + f(2) + \sum_{k=3}^{n} f(k) \\
&< f(1) + f(2) + \int_2^n f(x)\,dx \\
&= e^{-1} + 4e^{-2} + \left[-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\right]_2^n \\
&= \frac{e+4}{e^2} + e^{-2}(4 + 4 + 2) - e^{-n}(n^2 + 2n + 2) \\
&< \frac{3 + 4 + 10}{e^2} - 0 \\
&= \frac{17}{e^2},
\end{aligned}$$

för alla heltal $n \geq 3$, och eftersom summans termer är positiva så gäller olikheten $\sum_{k=1}^{n} f(k) < \frac{17}{e^2}$ då såklart även för $n = 1$ och $n = 2$.

7. Vi söker gränsvärdet av

$$f(n) = \left(\frac{n^{n+1} + (n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n$$

då $n \to \infty$. Till att börja med finner vi, genom att ta $t = \frac{1}{n}$ i standardgränsvärdet $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, att

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \exp\frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \to \exp 1 = e,$$

då $n \to \infty$. Detta medför att $\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 0 \cdot e = 0$, så att vi kan använda samma standardgränsvärde igen, fast med $t = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$\begin{aligned}
\ln f(n) &= n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)}{\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
&\to e \cdot 1,
\end{aligned}$$

dvs. $f(n) \to e^e$, då $n \to \infty$.

Svar: e^e.