Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2013-06-03 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = (3-4x)e^{-2x^2}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x+3x^2)}{\ln(1+5x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+2^{2x})}{x}$.

3. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{x-3}{x^2+2x+2}$ (b) $\dfrac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-2x}}$.

4. Låt $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}$. Beräkna $\displaystyle\int_4^\infty f(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_3^\infty f(x)\,dx$.

5. En rak cirkulär cylindrisk oöppnad konservburk har volymen V. Bestäm radien och höjden, om burken ska få minimal area.

6. Bestäm alla linjer $x+y=m$ som har två gemensamma punkter med grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\arctan x\ ,\ x \geq -\sqrt{3}$.

7. Visa att $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cdot\sin nx\,dx = 0$ för alla trappfunktioner f definierade på $[a,b]$.

Lösningsskisser för TATA41 2013-06-03

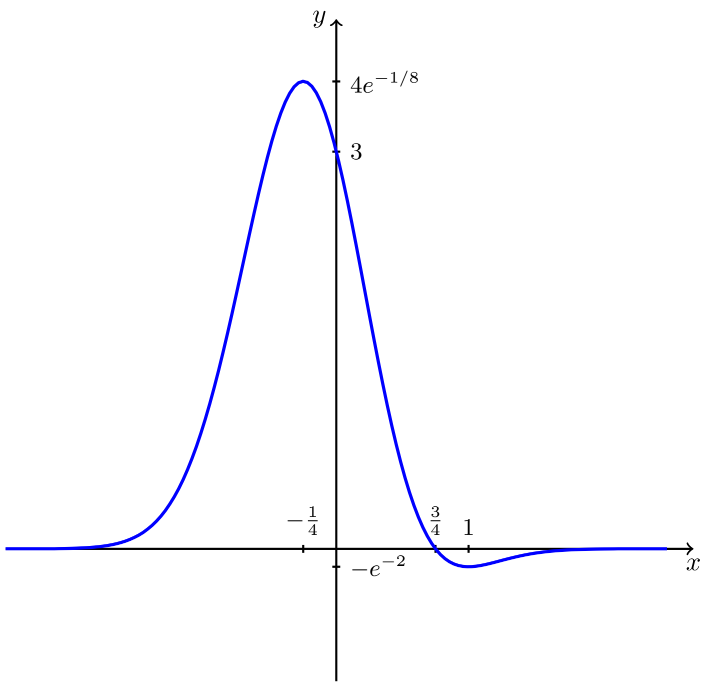
1. Funktionen $f(x) = (3-4x)e^{-2x^2}$ är definierad för alla reella x, samt uppenbart positiv för $x < 3/4$ och negativ för $x > 3/4$. Enligt standardgränsvärden gäller att $f(x) \to 0$ då $x \to \pm\infty$, så linjen $y = 0$ är vågrät asymptot (då $x \to \pm\infty$). Lodräta asymptoter saknas. Derivatan är

$$f'(x) = -4e^{-2x^2} - 4x(3-4x)e^{-2x^2} = 4(x-1)(4x+1)e^{-2x^2},$$

vilket ger följande teckentabell:

x		$-\frac{1}{4}$		1	
$4(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$4x+1$	$-$	0	$+$		$+$
e^{-2x^2}	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Funktionen har alltså lokalt maximum $f(-\frac{1}{4}) = 4e^{-1/8}$ och lokalt minimum $f(1) = -e^{-2}$.



2. (a) $\frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x+4}{x-2} \to \frac{12}{-4} = -3$ då $x \to -2$.

   (b) $\frac{\sin(2x+3x^2)}{\ln(1+5x)} = \frac{\sin(2x+3x^2)}{2x+3x^2} \frac{5x}{\ln(1+5x)} \frac{2+3x}{5} \to 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (c) $\frac{\ln(e^x+2^{2x})}{x} = \frac{1}{x}\ln\Big(4^x\big((\frac{e}{4})^x+1\big)\Big) = \frac{1}{x}\Big(\ln 4^x + \ln\big((\frac{e}{4})^x+1\big)\Big) = \ln 4 + \frac{1}{x}\ln\big((\frac{e}{4})^x+1\big) \to \ln 4 + 0 \cdot \ln(0+1) = \ln 4$ då $x \to \infty$ (eftersom $0 < \frac{e}{4} < 1$).

   Svar: (a) -3 (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\ln 4$.

3. (a) $\int \frac{x-3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{(x+1)-4}{(x+1)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+1) - 4\arctan(x+1) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 4\arctan(x+1) + C$.

   (b) Variabelbytet $t = \tan x$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ger $\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int \ln t\,dt = t\ln t - t + C = (\ln(\tan x) - 1)\tan x + C$.

   (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}} = \arcsin(x+1) + C$.

4. Vi har $f(x) = g(x-3)$ där $g(t) = \frac{1}{t(1+\sqrt{t})}$ $(t > 0)$. Primitiv funktion till g hittas med hjälp av variabelbytet $t = s^2$, $dt = 2s\,ds$ $(s > 0)$: $\int g(t)\,dt = \int \frac{2s\,ds}{s^2(1+s)} = 2\int\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)ds = 2(\ln s - \ln(s+1)) + C = -2\ln\frac{s+1}{s} + C = -2\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}}) + C$. Detta ger $\int_4^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty g(t)\,dt = \lim_{\omega\to\infty}\left[-2\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\right]_1^\omega = -2\ln 1 + 2\ln 2 = \ln 4$. Den andra integralen $\int_3^\infty f(x)\,dx$ är generaliserad både i $x = 3$ och i oändligheten, så för att den ska vara konvergent krävs att både $\int_3^4 f(x)\,dx$ och $\int_4^\infty f(x)\,dx$ är konvergenta. Men $\int_{3+\varepsilon}^4 f(x)\,dx = \int_\varepsilon^1 g(t)\,dt = \left[-2\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\right]_\varepsilon^1 \to \infty$ då $\varepsilon \to 0^+$, så integralen är divergent.

   Svar: $\int_4^\infty f(x)\,dx = \ln 4$, $\int_3^\infty f(x)\,dx$ är divergent.

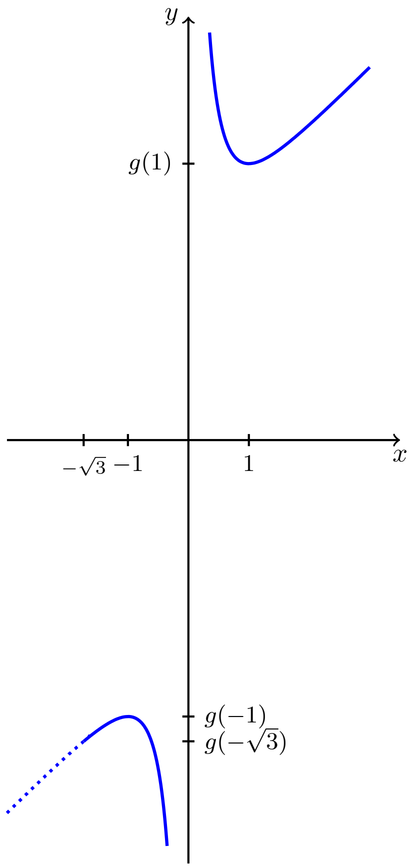
5. Om r är radien och h höjden så har burken volymen $V = \pi r^2 \cdot h$ och arean $A = 2\pi r\cdot h + 2\cdot\pi r^2$. Eliminera h så att arean fås som funktion av radien: $A(r) = 2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$ (där $r > 0$). Vi ser att $A(r) \to \infty$ då $r \to 0^+$ och då $r \to \infty$. Derivatan $A'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right)$ har teckenväxlingen $-0+$ med nollstället $r = r_0 = (\frac{V}{2\pi})^{1/3}$, som därmed är det värde på radien som ger minimal area. Den motsvarande höjden är $h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = 2r_0\frac{(V/2\pi)}{r_0^3} = 2r_0$ (och den minimala arean är $A(r_0) = 6\pi r_0^2$).

   Svar: Minsta arean fås då radien är $(\frac{V}{2\pi})^{1/3}$ och höjden $2(\frac{V}{2\pi})^{1/3}$ (alltså då höjden och diametern är lika).

6. Linjen $y = m - x$ skär grafen $y = f(x)$ där $f(x) = m - x$, alltså $f(x) + x = m$. Vi sätter därför $g(x) = f(x) + x = \frac{2}{x} + 2\arctan x + x$ och undersöker för vilka värden på m som ekvationen $g(x) = m$ har två lösningar i intervallet $x \geq -\sqrt{3}$. Derivatan $g'(x) = \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} + 1 = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+2)}{x^2(1+x^2)}$ ger teckentabellen

x		-1		0		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2+2	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$1+x^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

vilket ihop med gränsvärdena $g(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ och då $x \to 0^+$, samt det faktum att g är en udda funktion, ger följande utseende hos grafen $y = g(x)$:



För att besvara frågan tittar vi bara på den del av grafen där $x \geq -\sqrt{3}$ (den heldragna kurvan i figuren). Denna kurva skär linjen $y = m$ exakt två gånger ifall $g(-\sqrt{3}) \leq m < g(-1)$ eller $m > g(1)$, där $g(\pm 1) = \pm(3 + \frac{\pi}{2})$ och $g(-\sqrt{3}) = -(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}) = -(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3})$.

Svar: Linjerna $x + y = m$ med $-(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3}) \leq m < -(3 + \frac{\pi}{2})$ eller $m > 3 + \frac{\pi}{2}$.

7. Om trappfunktionen f har värdet c_k i intervallet $x_{k-1} \leq x < x_k$, där $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$, så blir

$$I_n = \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = c_1 \int_{x_0}^{x_1} \sin nx \, dx + c_2 \int_{x_1}^{x_2} \sin nx \, dx + \cdots + c_m \int_{x_{m-1}}^{x_m} \sin nx \, dx.$$

Men för godtyckliga c och d gäller att

$$\int_c^d \sin nx \, dx = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{(\cos nc - \cos nd)}_{\text{begr.}} \to 0 \qquad \text{då } n \to \infty,$$

så $I_n \to c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_m \cdot 0 = 0$, vsv.