Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2013-03-26 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = e^{x+\frac{4}{x}}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök följande gränsvärden:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 7} \frac{e^x - e^7}{x-7} \qquad \text{(c)} \quad \lim_{n\to\infty} n\,(2^{1/n}-1)$$

3. Beräkna följande primitiva funktioner:

$$\text{(a)} \quad \int (2+x^2)^2 dx \qquad \text{(b)} \quad \int \arctan x\, dx \qquad \text{(c)} \quad \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 2\cos x + 2}\, dx$$

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^2-2x+1}{x^4+x^2}\, dx$.

5. (a) Formulera analysens huvudsats.

   (b) Beräkna $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^3 (\ln t)^2 dt$.

   (c) Beräkna $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} e^{t^2} dt$.

6. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

7. Hur många lokala extrempunkter har $f(x) = x^4 + ax^2 - 8x$ för olika värden på parametern $a \in \mathbf{R}$?

Lösningsskisser för TATA41 2013-03-26

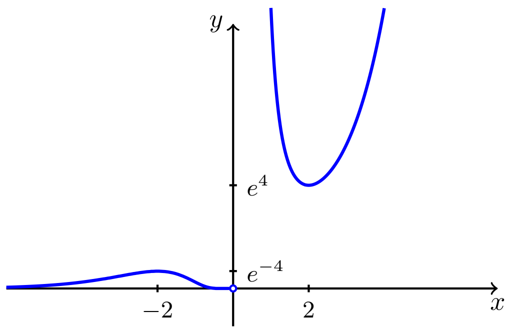
1. Funktionen $f(x) = e^{x+\frac{4}{x}}$ är definierad för $x \neq 0$, och uppenbart positiv. Då $x \to \infty$ och då $x \to 0^+$ så gäller $x + \frac{4}{x} \to \infty$ och därmed $f(x) \to \infty$. Då $x \to -\infty$ och då $x \to 0^-$ så har vi istället $x + \frac{4}{x} \to -\infty$ och därmed $f(x) \to 0$. Alltså är linjen $x = 0$ lodrät asymptot, och linjen $y = 0$ är vågrät asymptot (då $x \to -\infty$). Derivatan är

$$f'(x) = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) e^{x+\frac{4}{x}} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} e^{x+\frac{4}{x}},$$

vilket ger följande teckentabell:

x		-2		0		2	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$e^{x+\frac{4}{x}}$	$+$		$+$	ej def.	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Funktionen har lokalt maximum $f(-2) = e^{-4}$ och lokalt minimum $f(2) = e^4$. Graf (ej skalenlig figur, eftersom $e^4 \approx 54{,}6$ och $e^{-4} \approx 0{,}018$):



2. (a) $\frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1} \to \frac{2}{3}$ då $x \to 1$.

   (b) $x \to 7$ medför att $t = x - 7 \to 0$, och därmed $\frac{e^x - e^7}{x-7} = \frac{e^{7+t} - e^7}{t} = e^7 \cdot \frac{e^t - 1}{t} \to e^7 \cdot 1$, enligt standardgränsvärde.

   (c) $t = \frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$, så $n\,(2^{1/n} - 1) = \frac{1}{t}(2^t - 1) = \frac{e^{t \ln 2} - 1}{t \ln 2} \ln 2 \to 1 \cdot \ln 2$, enligt standardgränsvärde.

   Svar: (a) $\frac{2}{3}$ (b) e^7 (c) $\ln 2$.

3. (a) $\int (2 + x^2)^2 dx = \int (4 + 4x^2 + x^4)\, dx = 4x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C$.

   (b) $\int 1 \cdot \arctan x\, dx = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$.

   (c) $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^2 x + 2\cos x + 2} = \int \frac{2 \sin x \cos x\, dx}{\cos^2 x + 2 \cos x + 2} = [t = \cos x,\ dt = -\sin x\, dx] = -2 \int \frac{t\, dt}{t^2 + 2t + 2} = [s = t + 1,\ ds = dt] = -2 \int \frac{(s-1)\, ds}{s^2+1} = \int \frac{-2s\, ds}{s^2+1} + \int \frac{2\, ds}{s^2+1} = -\ln(s^2+1) + 2 \arctan s + C = 2 \arctan(1 + \cos x) - \ln(\cos^2 x + 2\cos x + 2) + C$.

4. Partialbråksuppdelning ger $\frac{2x^2-2x+1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}$, så

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{2x^2-2x+1}{x^4+x^2}\,dx &= \lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{x} - 2\ln x + \ln(x^2+1) + \arctan x\right]_1^\omega \\ &= \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{\omega} + \ln(1+\omega^{-2}) + \arctan\omega + 1 - \ln 2 - \arctan 1\right) \\ &= 0 + 0 + \frac{\pi}{2} + 1 - \ln 2 - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Svar: $1 + \frac{\pi}{4} - \ln 2$.

5. (a) Se läroboken.

   (b) $\frac{d}{dx}\int_x^3 (\ln t)^2 dt = -(\ln x)^2$.

   (c) $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} e^{t^2}\,dt = 2xe^{x^4} - 2e^{4x^2}$.

6. $f(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$ är avtagande för $x > 0$ (eftersom täljare och nämnare båda är positiva och nämnaren är växande), så ur figur fås

$$(*) \qquad \int_1^n f(x)\,dx < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_0^n f(x)\,dx.$$

Vi har $\int f(x)\,dx = \arctan\frac{x}{n} + C$, så vi får

$$\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} < \frac{\pi}{4} - 0.$$

Vänsterledet går mot $\pi/4$ då $n\to\infty$, så instängning ger $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$.

Svar: $\pi/4$.

Anm.: Man kan tänka sig flera varianter istället för $(*)$, t.ex.

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_0^n f(x)\,dx$$

eller

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,dx < \sum_{k=1}^n f(k) < f(1) + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Dessa uppskattningar ger lite andra räkningar, men resultatet blir detsamma.

(En alternativ lösning, om man känner till Riemannsummor: $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2}\,\frac{1}{n} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ då $n\to\infty$.)

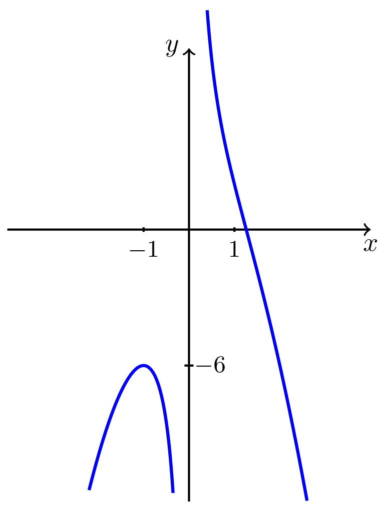
7. Eftersom $f(x) = x^4 + ax^2 - 8x$ är deriverbar, så är ett nödvändigt villkor för att x ska vara en lokal extrempunkt att $0 = f'(x) = 4x^3 + 2ax - 8$, vilket (eftersom $x = 0$ inte är en lösning) är ekvivalent med

$$\frac{4}{x} - 2x^2 = a.$$

Vi inför beteckningen $g(x) = 4x^{-1} - 2x^2$ för vänsterledet och gör funktionsundersökning. Från $g'(x) = -4x^{-2} - 4x = -4(1 + x^3)/x^2$ fås

x		-1		0	
-4	$-$		$-$		$-$
$1 + x^3$	$-$	0	$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$

vilket ihop med gränsvärdena $g(x) \to -\infty$ då $x \to \pm\infty$ och då $x \to 0^-$, samt $g(x) \to \infty$ då $x \to 0^+$, ger följande utseende hos grafen $y = g(x)$:



Ur denna graf avläser vi antalet reella rötter till ekvationen $g(x) = a$ (som alltså är lika med antalet reella nollställen hos f' för olika värden på a).

I fallet $a < -6$, då antalet reella rötter är tre, måste dessa vara enkelnollställen till f', eftersom f' är ett tredjegradspolynom. Där växlar f' tecken, så de tre punkterna utgör tre lokala extrempunkter för f. I fallet $a > -6$ finns en ensam reell rot, som därmed måste vara ett nollställe till f' av multiplicitet tre eller ett; oavsett vilket så växlar f' tecken där, så denna ensamma rot utgör en lokal extrempunkt (f:s enda) i detta fall. (Man kan f.ö. notera att det måste vara en enkelrot; fallet trippelrot $x = b$ kan uteslutas eftersom $f'(x) = 4(x^3 + \frac{1}{2}ax - 2)$ inte för något a har formen $4(x - b)^3 = 4(x^3 - 3x^2b + 3xb^2 - b^3)$.) I det sista fallet $a = -6$ har ekvationen två rötter, så den ena ($x = -1$) måste vara ett dubbelnollställe där f' inte växlar tecken; där har f en terrasspunkt, och bara den andra roten ger upphov till en lokal extrempunkt för f.

Svar: f har tre lokala extrempunkter om $a < -6$, och en om $a \geq -6$.