Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2013-03-12 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4-1}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök följande gränsvärden:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2^x+x^2)}{\ln(3^x+x^3)}$$

3. Beräkna följande primitiva funktioner:

$$\text{(a)} \quad \int \frac{x^2}{x^2-3x+2}\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int x\cos 3x\,dx \qquad \text{(c)} \quad \int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

4. Hur många reella lösningar har ekvationen $\sqrt{x^2-2x}\,e^{x/2} = k$ för olika värden på parametern $k \in \mathbf{R}$?

5. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx$.

6. Visa att $e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$ för $x \geq 0$.

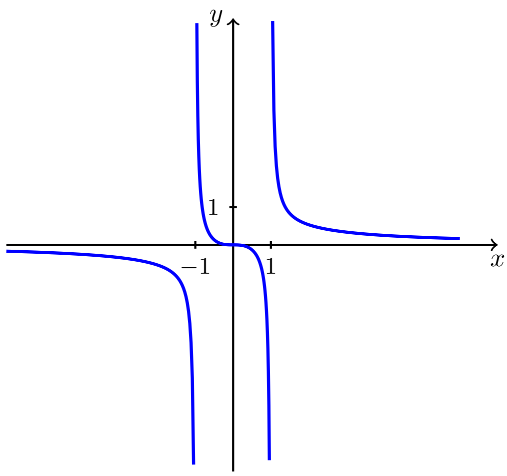
7. Låt $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} t\sin\frac{1}{t}\,dt$, med definitionsmängden $D_f = [1, \infty[$. Visa att f är strängt växande och beräkna $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Lösningsskisser för TATA41 2013-03-12

1. Funktionen $f(x) = \frac{x^3}{x^4-1}$ är definierad för $x \neq \pm 1$. Relevanta gränsvärden: $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 1^{\pm}$, dito då $x \to (-1)^{\pm}$, samt $f(x) = \frac{1}{x(1-x^{-4})} \to 0$ då $x \to \pm\infty$. Alltså är linjerna $x = 1$ och $x = -1$ lodräta asymptoter, och linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot då $x \to \pm\infty$. Vidare kan man notera att f är udda samt att $f(x) \approx -x^3$ då x ligger nära noll och $f(x) \approx 1/x$ då $|x|$ är stort. Derivatan

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^4-1) - x^3 \cdot 4x^3}{(x^4-1)^2} = \frac{-x^2(3+x^4)}{(x^4-1)^2}$$

är uppenbart negativ överallt, utom i $x = \pm 1$ där den är odefinierad förstås, samt i $x = 0$ där den är noll. Därmed är f strängt avtagande i intervallen $x < -1$, $-1 < x < 1$ och $1 < x$. Lokala extrempunkter saknas (men $x = 0$ är en terrasspunkt).



2. (a) $\frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} = \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} \to 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (b) $\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x} + 3 \to \sqrt{9} + 3 = 6$ då $x \to 9$.

   (c) $\frac{\ln(2^x+x^2)}{\ln(3^x+x^3)} = \frac{\ln(2^x(1+x^2/2^x))}{\ln(3^x(1+x^3/3^x))} = \frac{x\ln 2+\ln(1+x^2/2^x)}{x\ln 3+\ln(1+x^3/3^x)} = \frac{\ln 2+\frac{1}{x}\ln(1+x^2/2^x)}{\ln 3+\frac{1}{x}\ln(1+x^3/3^x)} \to \frac{\ln 2+0\cdot\ln(1+0)}{\ln 3+0\cdot\ln(1+0)} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, då $x \to \infty$, enligt standardgränsvärden.

   Svar: (a) $\frac{2}{3}$ (b) 6 (c) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.

3. (a) $\int \frac{x^2}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(1 + \frac{3x-2}{x^2-3x+2}\right) dx = \int \left(1 + \frac{4}{x-2} + \frac{-1}{x-1}\right) dx = x + 4\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$.

   (b) Partiell integration ger $\int x\cos 3x\,dx = x \cdot \frac{1}{3}\sin 3x - \int 1 \cdot \frac{1}{3}\sin 3x\,dx = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$.

   (c) Variabelbytet $t = 1 + \sqrt{x}$ (med $x = (t-1)^2$ och $dx = 2(t-1)\,dt$) ger $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \sqrt{t}\,2(t-1)\,dt = 2\int (t^{3/2} - t^{1/2})\,dt = 2(\frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2}) + C = \frac{4}{15}t^{3/2}(3t-5) + C = \frac{4}{15}(1+\sqrt{x})^{3/2}(3\sqrt{x}-2) + C$.

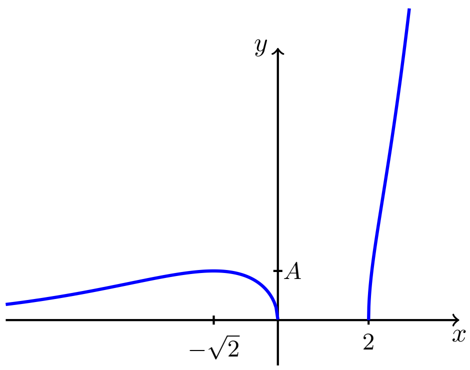
4. Sätt $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}\, e^{x/2}$; definitionsmängden ges av villkoret $x^2 - 2x \geq 0$, alltså $x \leq 0$ eller $x \geq 2$. Man kan omedelbart notera att $f(x) \geq 0$ för alla dessa x (med $f(x) = 0$ i punkterna $x = 0$ och $x = 2$). Gränsvärden: $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$. Derivatan är

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}\, e^{x/2} + \sqrt{x^2-2x}\, \frac{1}{2} e^{x/2} = \frac{(2x-2) + (x^2-2x)}{2\sqrt{x^2-2x}}\, e^{x/2}$$
$$= \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{2\sqrt{x^2-2x}}\, e^{x/2},$$

vilket ger följande teckentabell:

x		$-\sqrt{2}$		0		2	
$x+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$		(irrelevant)		$+$
$x-\sqrt{2}$	$-$		$-$		(irrelevant)		$+$
$\sqrt{x^2-2x}$	$+$		$+$	0	ej def.	0	$+$
$e^{x/2}$	$+$		$+$		(irrelevant)		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	ej def.	ej def.	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	0	ej def.	0	$\nearrow$

Ur grafen avläser vi antalet lösningar till ekvationen $f(x) = k$ för olika värden på k. (Räkna hur många gånger linjen $y = k$ skär grafen $y = f(x)$.) Det lokala maximivärdet är $A = f(-\sqrt{2}) = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\, e^{-1/\sqrt{2}}$.



Svar: Låt $A = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\, e^{-1/\sqrt{2}}$. Ekvationen har ingen lösning om $k < 0$, två lösningar om $k = 0$, tre lösningar om $0 < k < A$, två lösningar om $k = A$, och en lösning om $A < k$.

5. $\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\ln x - \ln \sin x\right]_\varepsilon^{\pi/2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\ln \frac{x}{\sin x}\right]_\varepsilon^{\pi/2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\ln \frac{\pi}{2} - \ln \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon}\right) = \ln \frac{\pi}{2} - \ln 1$, enligt standardgränsvärde.

Svar: $\ln \frac{\pi}{2}$.

6. Sätt $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$. Vi vill visa att $f(x) \geq 0$ för $x \geq 0$. Derivatan är $f'(x) = -1 + x + e^{-x}$. Vi undersöker f' med hjälp av dess derivata, $f''(x) = 1 - e^{-x}$:

x		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Minimivärdet är $f'(0) = 0$, så $f'(x) > 0$ för $x \neq 0$. Med denna information kan vi göra en teckentabell för f:

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	terrass-punkt	$\nearrow$

Värdet i terrasspunkten är $f(0) = 0$, och därmed är $f(x) \geq 0$ för $x \geq 0$, vilket skulle visas.

7. Derivering av $f(x) = \int_x^{x+1} t \sin \frac{1}{t}\, dt$ med hjälp av analysens huvudsats ger

$$f'(x) = (x+1) \sin \tfrac{1}{x+1} - x \sin \tfrac{1}{x} = g(\tfrac{1}{x+1}) - g(\tfrac{1}{x}),$$

där $g(y) = \frac{\sin y}{y}$. Derivering visar att g är avtagande för $0 < y < \pi/2$:

$$g'(y) = \tfrac{\cos y}{y} - \tfrac{\sin y}{y^2} = \tfrac{\cos y}{y^2}\,(y - \tan y) < 0.$$

(Här används den kända olikheten $\sin y < y < \tan y$ för $0 < y < \pi/2$; ett annat sätt att ta reda på tecknet hos g' är att undersöka g'', ungefär som i föregående uppgift.) Om $x \geq 1$ så är $0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$, så $f'(x) > 0$ och f är därmed strängt växande, vilket skulle visas.

Vad gäller gränsvärdet, så ger integralkalkylens medelvärdessats för varje x ett tal $\xi(x)$ mellan x och $x+1$ sådant att $f(x) = ((x+1) - x)\,\xi(x) \sin \frac{1}{\xi(x)} = \xi(x) \sin \frac{1}{\xi(x)}$. Instängning ger att $\xi(x) \to \infty$ då $x \to \infty$, så

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{\xi\to\infty} \xi \sin \frac{1}{\xi} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \sin t = 1.$$