Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2013-01-12 kl 08–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 10 + 2\ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 3\arctan x$, $x > 0$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\ln(1+4x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$.

3. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{x}{x^2+2x-3}$ (b) $x^3 \sin x^2$ (c) $\cos^4 x$.

4. Hur många olika lösningar har ekvationen $\dfrac{1+2x^2}{x} = 3 + 2\ln(1+x)$?

5. (a) Formulera analysens huvudsats.

   (b) Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}}$.

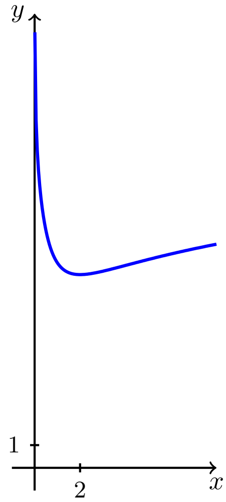
   (c) Bestäm $g'(x)$ då $g(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} t\cos t^3\, dt$.

6. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}\, dx$.

7. Vilket av talen e^π och π^e är störst?

Lösningsskisser för TATA41 2013-01-12

1. Det är praktiskt att göra omskrivningen $f(x) = 10 + 2\ln(x^2+1) - 2\ln x - 3\arctan x$, så att det blir lättare att derivera: $f'(x) = \frac{4x}{x^2+1} - \frac{2}{x} - \frac{3}{1+x^2} = \frac{2x^2-3x-2}{x(1+x^2)} = \frac{(2x+1)(x-2)}{x(1+x^2)}$, för $x > 0$. Detta ger följande teckentabell:



x	0		2	
$2x+1$		$+$		$+$
$x-2$		$-$	0	$+$
$x(1+x^2)$		$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Funktionen har alltså lokalt (och globalt) minimum $f(2) = 10 + 2\ln\frac{5}{2} - 3\arctan 2$; eftersom $\arctan x < \frac{\pi}{2} < 2$ för alla x så är $f(2) > 10 + 0 - 6 > 4$, och f är därmed positiv överallt. I det ursprungliga uttrycket för $f(x)$ syns att $f(x) \to \infty$ både då $x \to 0^+$ och då $x \to \infty$, så linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot och det saknas vågrät asymptot.

2. (a) $\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1} \to \frac{3}{2}$ då $x \to 1$.

   (b) $\frac{e^{\sin x}-1}{\ln(1+4x)} = \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\frac{4x}{\ln(1+4x)}\frac{1}{4} \to 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (c) Förläng med konjugatuttrycket och förkorta därefter med $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{(x+\sqrt{x})-(x-\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}} \to \frac{2}{1+1} = 1, \qquad \text{då } x \to \infty.$$

   Svar: (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1.

3. (a) $\int \frac{x\,dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{x\,dx}{(x+3)(x-1)} = \int \left(\frac{3/4}{x+3} + \frac{1/4}{x-1}\right) dx = \frac{3}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C$.

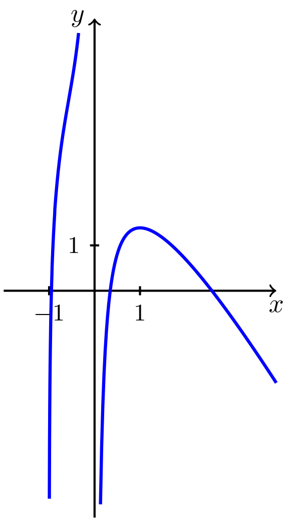
   (b) $\int x^3 \sin x^2\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int t\sin t\,dt = \frac{1}{2}(-t\cos t + \sin t) + C = \frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2\cos x^2) + C$.

   (c) $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$, så $\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3x}{8} + C$.

4. Ekvationen är ekvivalent med att $f(x) = 3 + 2\ln(1+x) - 2x - \frac{1}{x} = 0$. Vi gör funktionsundersökning på vanligt sätt: f är definierad för $x > -1$, $x \neq 0$, och derivatan är $f'(x) = \frac{2}{1+x} - 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{-2x^3+x+1}{x^2(1+x)} = \frac{-2(x-1)\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)}{x^2(1+x)}$.

x	-1		0		1	
$-2(x-1)$		$+$		$+$	0	$-$
$(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$		$+$		$+$		$+$
x^2		$+$	0	$+$		$+$
$1+x$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$+$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	ej def.	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Gränsvärden: $f(x) \to \infty$ då $x \to 0^-$, medan $f(x) \to -\infty$ i de tre fallen $x \to 0^+$, $x \to (-1)^+$, $x \to \infty$. Vidare är $f(1) = 2\ln 2 > 0$. Detta ger att grafen för f skär x-axeln på tre ställen:



Svar: Ekvationen har tre lösningar.

5. (a) Om f är kontinuerlig på ett öppet intervall I och $a \in I$, så är funktionen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ($x \in I$) en primitiv funktion till f på I.

(b) $f(x) = -\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}}$ ger direkt $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+7}}$ enligt (a).

(c) $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} t\cos t^3\,dt - \int_0^{x^2} t\cos t^3\,dt$ ger enligt (a) och kedjeregeln att $g'(x) = 3x^2 \cdot x^3\cos((x^3)^3) - 2x \cdot x^2\cos((x^2)^3) = 3x^5\cos x^9 - 2x^3\cos x^6$.

6. Primitiven är

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}\,dx &= \frac{-1}{2(1+x^2)}\,\ln(1+x) - \int \frac{-1}{2(1+x^2)}\,\frac{1}{1+x}\,dx \\
&= \frac{-1}{2(1+x^2)}\,\ln(1+x) + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right) dx \\
&= \frac{-1}{2(1+x^2)}\,\ln(1+x) + \frac{1}{4}\Big(\ln(1+x) + \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big) + C \\
&= -\frac{\ln(1+x)}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} + C,
\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}
\int_0^{\omega} \frac{x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}\,dx &= -\frac{\ln(1+\omega)}{2(1+\omega^2)} + \frac{1}{4}\arctan\omega + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} \\
&= -\frac{\ln(\omega(\omega^{-1}+1))}{2\omega^2(\omega^{-2}+1)} + \frac{1}{4}\arctan\omega + \frac{1}{4}\ln\frac{\omega(\omega^{-1}+1)}{\omega\sqrt{\omega^{-2}+1}} \\
&= -\frac{\frac{\ln\omega}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\ln(\omega^{-1}+1)}{2(\omega^{-2}+1)} + \frac{1}{4}\arctan\omega + \frac{1}{4}\ln\frac{\omega^{-1}+1}{\sqrt{\omega^{-2}+1}} \\
&\to -\frac{0+0\cdot\ln 1}{2\cdot 1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1}{1} = \frac{\pi}{8} \qquad \text{då } \omega \to \infty.
\end{aligned}$$

Svar: $\pi/8$.

7. För att jämföra talen e^{π} och π^{e} kan vi jämföra deras logaritmer, π respektive $e\ln\pi$. Vi behöver alltså avgöra om $\pi - e\ln\pi$ är positivt eller negativt. Sätt $f(x) = x - e\ln x$ (för $x > 0$) och gör funktionsundersökning:

x	0		e	
$f'(x) = 1 - \frac{e}{x}$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	lok. min. $f(e) = 0$	$\nearrow$

Alltså är $f(x) > 0$ för $0 < x \neq e$. Speciellt gäller $f(\pi) > 0$, vilket säger att $\pi > e\ln\pi$, och därmed, eftersom exponentialfunktionen är strängt växande, $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Svar: e^{π} är störst.