Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2012-08-25 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

2. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{e^{-x-x^2}}{2+x}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

3. Beräkna följande primitiva funktioner:

   (a) $\displaystyle\int x^2(2+x^3)^7\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sin 2x\cos x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}\,dx$

4. (a) Definiera vad som menas med att funktionen f är kontinuerlig i punkten a.
   (b) Definiera vad som menas med att funktionen f är deriverbar i punkten a.
   (c) Bevisa att om f är deriverbar i punkten a så är den även kontinuerlig där.

5. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty |x-3|\,e^{-2x}\,dx$.

6. Antag att en rätvinklig triangel i planet har ett hörn i origo, ett hörn på den positiva x-axeln, ett hörn på den positiva y-axeln, och är sådan att hypotenusan går genom en given punkt (a, b) (där a och b är positiva). Vilken är den kortaste möjliga längden på hypotenusan?

7. Antag att $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ är kontinuerlig och att $f(x)\to\infty$ då $x\to\infty$. Visa att $\displaystyle\frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx \to \infty$ då $X\to\infty$.

Lösningsskisser för TATA41 2012-08-25

1. (a) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{(x-1)+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}\to-\frac{1}{2}$ då $x\to-1$.

   (b) $\frac{e^{\sin 2x}-1}{x}=\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\to 1\cdot 1\cdot 2=2$ då $x\to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (c) Vi har $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0^+}(1-t)^{1/t}$, och $(1-t)^{1/t}=\exp\left(-\frac{\ln(1+(-t))}{(-t)}\right)\to e^{-1}$ då $t\to 0^+$, enligt standardgränsvärde.

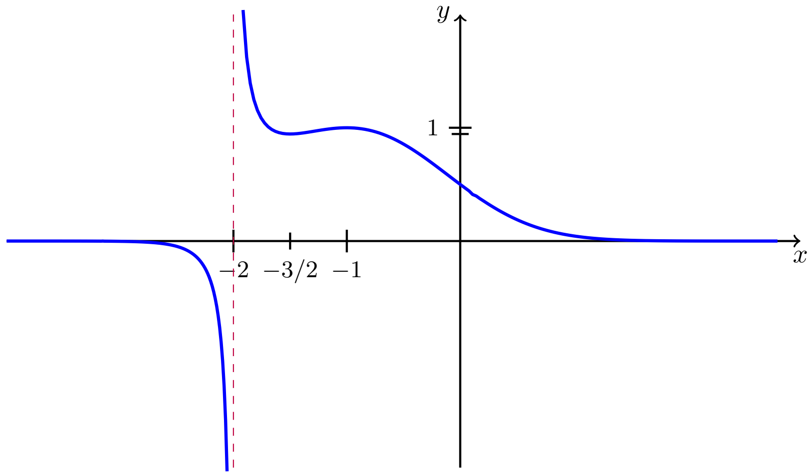
   Svar: (a) $-\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) e^{-1}.

2. Funktionen $f(x)=\dfrac{e^{-x-x^2}}{2+x}$ är definierad för $x\neq-2$. Linjen $x=-2$ är en lodrät asymptot till f:s graf, eftersom $f(x)\to\pm\infty$ då $x\to(-2)^{\pm}$. Linjen $y=0$ är vågrät asymptot, eftersom $f(x)\to 0$ då $x\to\pm\infty$.

   Derivering ger $f'(x)=\dfrac{(-1-2x)e^{-x-x^2}}{2+x}+\dfrac{-e^{-x-x^2}}{(2+x)^2}=\dfrac{-(x+1)(2x+3)e^{-x-x^2}}{(2+x)^2}$, vilket leder till följande teckentabell:

x		-2		$-\frac{3}{2}$		-1	
$x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(2+x)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$-e^{-x-x^2}$	$-$		$-$		$-$		$-$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

   Funktionen har alltså lokalt minimum $f(-\frac{3}{2})=2e^{-3/4}$ ($\approx 0{,}9447$) och lokalt maximum $f(-1)=1$.



3. (a) $\int x^2(2+x^3)^7\,dx = \frac{1}{3}\int(2+x^3)^7(3x^2)\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}(2+x^3)^8 + C = \frac{1}{24}(2+x^3)^8 + C$.

   (b) $\int \sin 2x \cos x\,dx = \int 2\sin x\cos x\cdot\cos x\,dx = -2\int\cos^2 x\cdot(-\sin x)\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x + C_1$.

   Alternativt kan man skriva om produkten till en summa: $\int \sin 2x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\big(\sin(2x+x)+\sin(2x-x)\big)\,dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C_2$.

   Eller så partialintegrerar man två gånger, vilket ger $\int \sin 2x\cos x\,dx = \sin 2x\sin x + 2\cos 2x\cos x + 4\int \sin 2x\cos x\,dx$, dvs $\int \sin 2x\cos x\,dx = -\frac{1}{3}(\sin 2x\sin x + 2\cos 2x\cos x) + C_3$.

   (Även om de ser olika ut så kan uttrycken i de tre svaren inte skilja sig åt med mer än en additiv konstant; i detta fall råkar de till och med vara exakt lika, dvs $C_1 = C_2 = C_3$.)

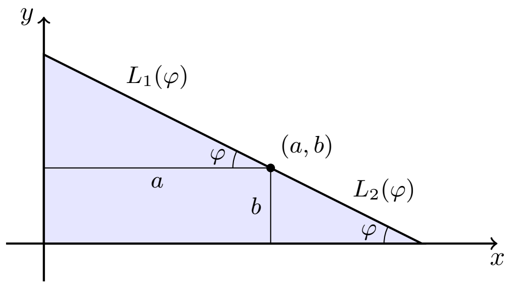
   (c) Variabelbytet $t = \sqrt{x-2}$ ger $x = t^2+2$ och därmed $dx = 2t\,dt$, så att $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\,2t\,dt = 2\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\,dt = 2\int\big(1-\frac{1}{1+t^2}\big)dt = 2t - 2\arctan t + C = 2\sqrt{x-2} - 2\arctan\sqrt{x-2} + C$.

4. Se läroboken.

5. $\int_0^\infty |x-3|\,e^{-2x}\,dx = -\int_0^3(x-3)e^{-2x}\,dx + \int_3^\infty(x-3)e^{-2x}\,dx = -\Big[\frac{1}{4}(5-2x)e^{-2x}\Big]_0^3 + \lim_{\omega\to\infty}\Big[\frac{1}{4}(5-2x)e^{-2x}\Big]_3^\omega = -\frac{1}{4}(-e^{-6}-5) + \frac{1}{4}(0-(-e^{-6})) = \frac{5}{4}+\frac{1}{2}e^{-6}$. (Här använder vi förstås att $\lim_{\omega\to\infty}\omega e^{-2\omega} = \lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega}{e^{2\omega}} = 0$ enligt ett standardgränsvärde.)

   Svar: $\frac{5}{4}+\frac{1}{2}e^{-6}$.

6. Med beteckningar enligt nedanstående figur erhålls $\cos\varphi = a/L_1(\varphi)$ och $\sin\varphi = b/L_2(\varphi)$.



   Hypotenusans längd är alltså $L(\varphi) = L_1(\varphi)+L_2(\varphi) = a/\cos\varphi + b/\sin\varphi$, och vi söker det minsta värdet på detta uttryck när vinkeln φ varierar i intervallet $0<\varphi<\pi/2$. Derivering ger

$$L'(\varphi) = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{b\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{a\sin^3\varphi - b\cos^3\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}.$$

   Täljaren är uppenbart en växande funktion av φ i det aktuella intervallet (eftersom både $\sin^3\varphi$ och $-\cos^3\varphi$ är växande), så den växlar tecken från negativ till positiv vid nollstället $\varphi = \varphi_0 = \arctan \sqrt[3]{b/a}$. Nämnaren är positiv. Detta ger följande teckentabell:

φ	0		φ_0		$\pi/2$
$L'(\varphi)$	ej def.	$-$	0	$+$	ej def.
$L(\varphi)$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.

Alltså är hypotenusans minsta möjliga längd lika med $L(\varphi_0)$, vilket med hjälp av sambanden $\sin(\arctan t) = t/\sqrt{1+t^2}$ och $\cos(\arctan t) = 1/\sqrt{1+t^2}$ förenklas såhär:

$$\begin{aligned} L(\varphi_0) &= \frac{a}{\cos\varphi_0} + \frac{b}{\sin\varphi_0} = \frac{a}{1/\sqrt{1+(b/a)^{2/3}}} + \frac{b}{(b/a)^{1/3}/\sqrt{1+(b/a)^{2/3}}} \\ &= \sqrt{1+(b/a)^{2/3}}\big(a + a^{1/3}b^{2/3}\big) = \sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}\,a^{-1/3}\big(a + a^{1/3}b^{2/3}\big) \\ &= \sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}\big(a^{2/3}+b^{2/3}\big) = \big(a^{2/3}+b^{2/3}\big)^{3/2}. \end{aligned}$$

Svar: $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$.

(Anm.: Detta problem är väsentligen samma som det i problemsamlingen där man ska avgöra hur lång en stång som längst får vara för att kunna bäras genom en gatukorsning.)

7. Sätt $g(X) = \frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx$ (för $X > 0$, säg). Vi vill visa att $g(X) \to \infty$ då $X \to \infty$. Enligt definitionen av oegentligt gränsvärde behöver vi visa att givet ett godtyckligt tal M så finns ett tal ψ sådant att $g(X) > M$ då $X > \psi$.

Låt alltså M vara ett godtyckligt tal, och sätt $m = 2M$. Enligt förutsättningen att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ så finns det ett tal ω (som vi kan låta vara positivt) sådant att $f(x) > m$ då $x > \omega$. För $X > \omega$ gäller då att

$$\begin{aligned} g(X) &= \frac{1}{X}\left(\int_0^\omega f(x)\,dx + \int_\omega^X f(x)\,dx\right) > \frac{1}{X}\left(\int_0^\omega f(x)\,dx + \int_\omega^X m\,dx\right) \\ &= \frac{1}{X}\left(\int_0^\omega f(x)\,dx + (X-\omega)m\right) = m + \frac{1}{X}\left(\int_0^\omega f(x)\,dx - \omega m\right). \end{aligned}$$

Uttrycket i högerledet, kalla det $h(X)$, går mot m då $X \to \infty$, vilket (enligt definitionen av egentligt gränsvärde, tillämpad med $\varepsilon = m/2$) innebär att det finns ett tal Ω sådant att $m - m/2 < h(X) < m + m/2$ då $x > \Omega$. Om $x > \omega$ och $x > \Omega$ så gäller alltså

$$g(X) > h(X) > m - m/2 = m/2 = M.$$

Med andra ord: om vi sätter $\psi = \max(\omega, \Omega)$ så gäller $g(X) > M$ då $X > \psi$. Beviset är därmed avslutat.

(Anm.: Antagandet om att f är kontinuerlig är bara till för att garantera att integralen existerar. Man kan försvaga förutsättningarna till att f ska vara integrerbar på intervallet $[0, X]$ för varje X; beviset förblir detsamma.)