Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2012-05-21 kl 08–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter $(n = 3, 4, 5)$.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 2 + \ln(1-x) + \arctan(2x+1)$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ (c) $e^{2x}\sin x$.

3. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+4x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{\ln(1+2^x)}.$

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3x+2}{x^4+3x^3+2x^2}\,dx.$

5. (a) Definiera vad som menas med att funktionen f är kontinuerlig i punkten a.

   (b) Definiera vad som menas med att funktionen f är deriverbar i punkten a.

   (c) Bevisa att om f är deriverbar i punkten a så är f även kontinuerlig där.

6. Ett bubbelbadkar sett uppifrån har den populära formen av en kvarts ellips, beskriven enligt
   $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \le 1\ ,\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0\ \ (\text{där } a > 0\ ,\ b > 0).$$
   En fyrsidig presenning har tre av sina hörn i punkterna $(0,0)$, $(a,0)$ och $(0,b)$. Var på badkarets kant ska det fjärde hörnet placeras för att presenningen ska täcka så stor del av badkaret som möjligt?

7. Talföljden $(a_n)_{n=2}^\infty$ definieras av att $a_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$. För vilka reella tal α är talföljden begränsad?

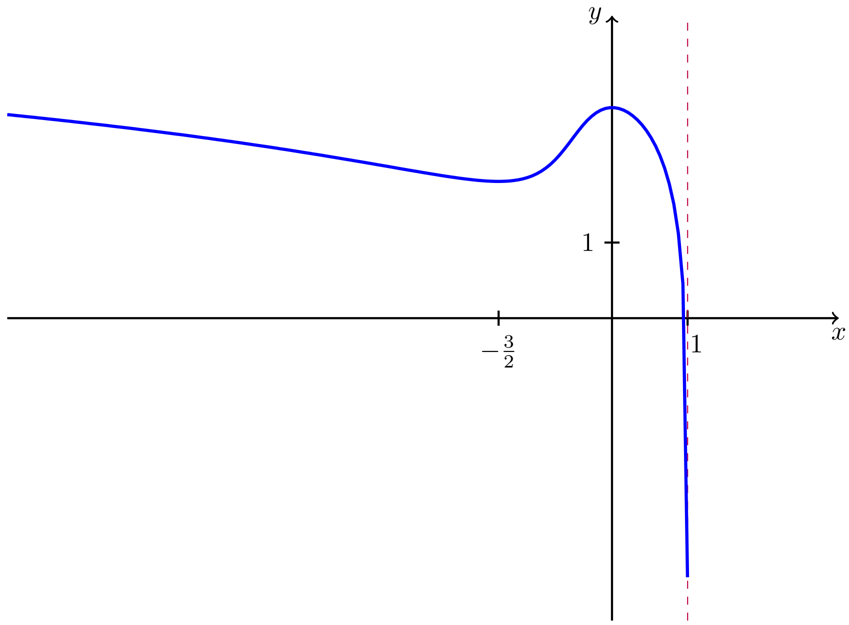
Lösningsskisser för TATA41 2012-05-21

1. Funktionen $f(x) = 2 + \ln(1-x) + \arctan(2x+1)$ är definierad för alla x som uppfyller $1 - x > 0$, dvs för $x < 1$. Linjen $x = 1$ är en lodrät asymptot till f:s graf, eftersom $f(x) \to -\infty$ då $x \to 1^-$. Vågrät asymptot saknas, eftersom $f(x) \to \infty$ då $x \to -\infty$.

   Derivering ger $f'(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1+(2x+1)^2} = \frac{2x(2x+3)}{(x-1)(1+(2x+1)^2)}$, vilket leder till följande teckentabell:

x		$-\frac{3}{2}$		0		1
$2x$	$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	
$1+(2x+1)^2$	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	ej def.
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.

   Lokala extremvärden är $f(-\frac{3}{2}) = 2 + \ln\frac{5}{2} - \arctan 2 > 2 + 0 - \frac{\pi}{2} > 0$ och $f(0) = 2 + \frac{\pi}{4}$.



2. (a) Variabelbytet $t = \cos x$ ger $\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}\,dx = \int \frac{-dt}{(2+t)^2} = \frac{1}{2+t} + C = \frac{1}{2+\cos x} + C$.

   (b) Variabelbytet $t = \ln x$ ger $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C$.

   (c) Denna primitiv går att beräkna på många sätt; jfr Exempel 5.11 i läroboken (Forsling–Neymark). Oavsett hur man gör så bör resultatet bli $\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x)e^{2x} + C$.

3. (a) $\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x} = \frac{e^{2x}-1}{2x} \frac{3x}{\sin 3x} \frac{2}{3} \to 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (b) Förläng med konjugatuttrycket: $\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+4x}} = \frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+4x}}{(x^2+x)-(x^2+4x)} =$ [för $x > 0$] $= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}}{-3} \to \frac{1+1}{-3} = -\frac{2}{3}$ då $x \to \infty$.

   (c) Vi har $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ (standardgränsvärde), och på samma sätt $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{2^x} = 1$. Dessutom är $\frac{e}{2} > 1$ så att $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^x = 0$. Alltså finner vi att $\frac{\ln(1+e^x)}{\ln(1+2^x)} = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} \frac{2^x}{\ln(1+2^x)} \left(\frac{e}{2}\right)^x \to 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ då $x \to -\infty$.

   Svar: (a) $\frac{2}{3}$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) 0.

4. $\int_1^\infty \frac{3x+2}{x^4+3x^3+2x^2}\,dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right) dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[-\frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|\right]_1^\omega = 1 - \ln\frac{3}{2} + \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{\omega} + \ln\left|\frac{1+2/\omega}{1+1/\omega}\right|\right) = 1 - \ln\frac{3}{2} + 0.$

   Svar: $1 - \ln\frac{3}{2}$.

5. Se läroboken.

6. Om den fjärde punkten betecknas med (x, y) (där x och y är positiva) så blir presenningens area $\frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay$ (dela den i två trianglar med en diagonal från $(0,0)$ till (x, y) för att se detta). Eftersom (x, y) ligger på badkarskanten så gäller $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, alltså $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$. Insättning av detta i uttrycket för arean ger $A(x) = \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ab\sqrt{1 - x^2/a^2}$, och det är detta uttryck vi vill maximera för $0 < x < a$. Derivering ger $A'(x) = \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x/a}{\sqrt{1-x^2/a^2}}\right)$. Om vi sätter $R = \sqrt{1 - x^2/a^2}$ så kan vi skriva $\frac{2}{b}A'(x) = \frac{R - x/a}{R} = \frac{R^2 - x^2/a^2}{R(R + x/a)} = \frac{1-2x^2/a^2}{R(R+x/a)} = \frac{(1-\sqrt{2}x/a)(1+\sqrt{2}x/a)}{R(R+x/a)}$, vilket ger teckentabellen

x	0		$a/\sqrt{2}$		a
$1 - \sqrt{2}x/a$		+	0	−	
$1 + \sqrt{2}x/a$		+		+	
$R(R + x/a)$		+		+	0
$A'(x)$		+	0	−	ej def.
$A(x)$		↗	lok. max.	↘	

Största arean ($A = ab/\sqrt{2}$) fås alltså då $x = a/\sqrt{2}$ (och därmed $y = b/\sqrt{2}$).
Svar: Hörnet ska placeras i punkten $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$.

(En alternativ metod som leder till enklare räkningar är att sätta $(x, y) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ där $0 < \varphi < \pi/2$. Detta ger arean $A(\varphi) = \frac{ab}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) = \frac{ab}{2}\sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})$, där man inte ens behöver derivera för att se att största värdet $A = \frac{ab}{\sqrt{2}}$ erhålls när $\varphi = \frac{\pi}{4}$.)

7. Om $\alpha \leq 0$, säg $\alpha = -\beta$ med $\beta \geq 0$, så är $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(\ln k)^\beta}{k} \geq (\ln 2)^\beta \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \geq (\ln 2)^\beta \int_2^n \frac{dx}{x} > (\ln 2)^\beta \ln n \to \infty$ då $n \to \infty$. (Summa-integral-uppskattning med den avtagande funktionen $f(x) = 1/x$.) Talföljden $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ är alltså obegränsad i detta fall.

Om $\alpha > 0$ så kan vi göra summa-integral-uppskattning med den avtagande funktionen $g(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ istället, vilket visar att

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} \leq a_n \leq g(2) + \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha},$$

där

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln(\ln n) - \ln(\ln 2), & \alpha = 1, \\ \frac{(\ln n)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Ur detta ser vi att

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha \leq 1, \\ \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Detta medför, pga instängningen ovan, att talföljden $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ är obegränsad för $0 < \alpha \leq 1$ och begränsad för $\alpha > 1$.

Svar: Talföljden är begränsad om och endast om $\alpha > 1$.