Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2012-04-12 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter $(n = 3, 4, 5)$. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \ln|x+2| - \dfrac{4}{x+1}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + 5x - 6}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\ln(x^3)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{6x} - 2e^{3x} + 1}{x^2}$

3. Beräkna följande primitiva funktioner:

   (a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int 2x\ln(x+3)\,dx$ (c) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx$

4. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-5|}\,dx$.

5. (a) Definiera vad som menas med att funktionen f är deriverbar i punkten $x = 0$.

   (b) Låt
   $$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
   Undersök $f'(0)$ och $f''(0)$.

6. För vilka reella värden på a har ekvationen
   $$\frac{x}{4} + \arctan\frac{2}{x} = a$$
   exakt en reell lösning?

7. Beräkna medelvärdet av funktionen $\sin^{100}$, dvs integralen
   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin x)^{100}\,dx.$$

Lösningsskisser för TATA41 2012-04-12

1. Definitionsmängden är $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}$; linjerna $x = -1$ och $x = -2$ är lodräta asymptoter till f:s graf eftersom

$$\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{t\to(-1)^{\pm}} f(x) = \mp\infty.$$

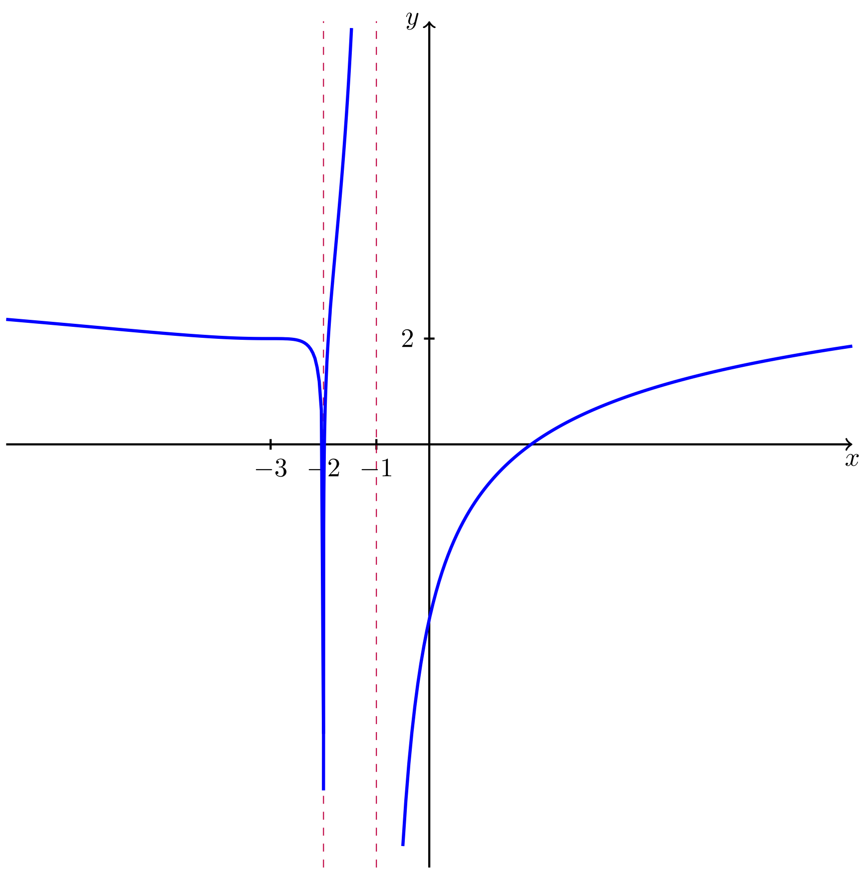
Däremot saknas vågräta asymptoter, eftersom

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty.$$

Derivering ger $f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)^2}{(x+1)^2(x+2)}$, vilket ger följande teckentabell:

x		-3		-2		-1	
$(x+3)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	ej def.	$+$	ej def.	$+$
$f(x)$	$\searrow$	terrass-punkt	$\searrow$	ej def.	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$

Lokala extrempunkter saknas alltså.



2. (a) $\frac{x^2-x}{x^2+5x-6} = \frac{x(x-1)}{(x+6)(x-1)} = \frac{x}{x+6} \to \frac{1}{7}$ då $x \to 1$.

   (b) $\frac{\ln\sqrt{x}}{\ln(x^3)} = \frac{\frac{1}{2}\ln x}{3\ln x} = \frac{1}{6}$ för alla $x > 0$, så gränsvärdet då $x \to \infty$ är $\frac{1}{6}$.

   (c) $\frac{e^{6x}-2e^{3x}+1}{x^2} = \frac{(e^{3x}-1)^2}{x^2} = 9\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)^2 \to 9 \cdot 1^2$ då $x \to 0$ (standardgränsvärde).

   Svar: (a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) 9.

3. (a) Partialbråksuppdela: $\int \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{x+2}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x - \ln|x| + C$.

   (b) Partiell integration följt av polynomdivision ger $\int 2x\ln(x+3)\,dx = x^2\ln(x+3) - \int x^2 \cdot \frac{1}{x+3}\,dx = x^2\ln(x+3) - \int\bigl(x - 3 + \frac{9}{x+3}\bigr)dx = (x^2 - 9)\ln(x+3) - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$.

   (c) Variabelbytet $t = \sqrt{x}$, följt av partiell integration, ger $\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int \sin t \cdot 2t\,dt = -\cos t \cdot 2t - \int(-\cos t)\cdot 2\,dt = -2t\cos t + 2\sin t + C = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$.

4. Variabelbytet $t = x - 5$ (med $dt = dx$) ändrar inte gränserna, eftersom $x - 5 \to \pm\infty$ när $x \to \pm\infty$. Då får vi en jämn integrand $e^{-|t|}$ och kan utnyttja symmetrin: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-5|}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-|t|}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = 2\lim_{\omega\to\infty}[-e^{-t}]_0^{\omega} = 2$. (Förenklingen i mitten bygger förstås på att $|t| = t$ när $t \geq 0$. Observera att man inte kan ta primitiv förrän man har gjort sig av med beloppstecknen!)

   Svar: 2.

5. (a) Det betyder att f är definierad i en omgivning av 0 och att gränsvärdet $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ existerar (ändligt).

   (b) Vi har (för $h \neq 0$)

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{(2h + h^2\cos\frac{1}{h}) - 0}{h} = 2 + h\cos\frac{1}{h},$$

   vilket går mot 2 då $h \to 0$, eftersom faktorn $\cos\frac{1}{h}$ är begränsad (mellan -1 och 1). Alltså är $f'(0) = 2$.

   För $x \neq 0$ är $f'(x) = \frac{d}{dx}\bigl(2x + x^2\cos\frac{1}{x}\bigr) = 2 + 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$, vilket saknar gränsvärde då $x \to 0$. Funktionen f' är alltså inte kontinuerlig i punkten $x = 0$, och kan därmed inte heller vara deriverbar där. Med andra ord: $f''(0)$ existerar inte. (Man kan förstås även visa detta genom att ställa upp differenskvoten $\frac{f'(h)-f'(0)}{h}$ och se att den saknar gränsvärde då $h \to 0$.)

   Svar: $f'(0) = 2$ och $f''(0)$ existerar inte.

6. Låt $f(x) = \frac{x}{4} + \arctan\frac{2}{x}$. Svaret kan enkelt utläsas ur f:s graf, så vi gör en vanlig funktionsundersökning för att ta reda på hur grafen ser ut. Vi kan till att börja med notera att f är en udda funktion, dvs $f(-x) = -f(x)$, som är definierad för $x \neq 0$ och uppfyller

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = 0 + \lim_{t\to\pm\infty} \arctan t = \pm\frac{\pi}{2}$$

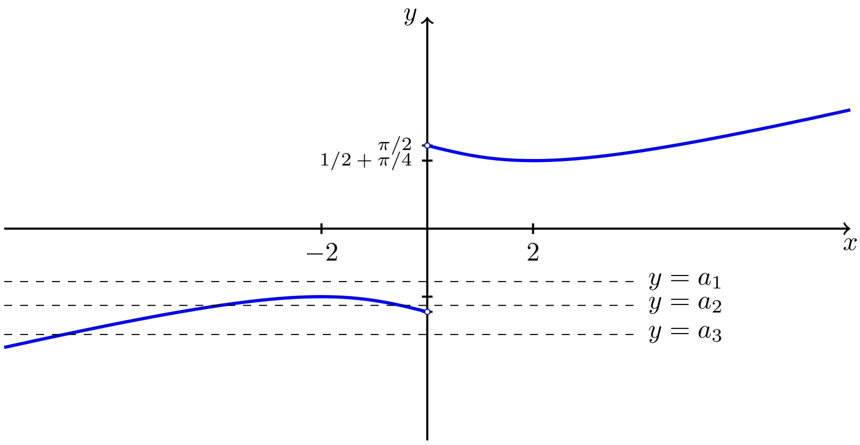
samt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Derivatan är (för $x \neq 0$)

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{1+(2/x)^2}\cdot\frac{-2}{x^2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{x^2+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{4(x^2+4)}.$$

Alltså:

x		-2		0		2	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$4(x^2+4)$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Funktionsvärdet i de lokala extrempunkterna är $f(\pm 2) = \pm(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})$.



Antalet reella lösningar till ekvationen $f(x) = a$ är lika med antalet skärnings-punkter mellan grafen $y = f(x)$ och den horisontella linjen $y = a$. I figuren illustreras de tre fall som kan inträffa när värdet på a ändras: det blir ingen skärning ifall $|a| < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$, två stycken ifall $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} < |a| < \frac{\pi}{2}$, och annars en skärning (och det var detta sista fall som det frågades om).

Svar: Ekvationen har exakt en lösning om $a = \pm(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})$ eller $a \geq \frac{\pi}{2}$ eller $a \leq -\frac{\pi}{2}$.

7. Med hjälp av Euler, binomialsatsen och termvis integration erhålls

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin x)^{100}\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{100}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(2i)^{100}}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}(e^{ix})^{100-k}(-e^{-ix})^k\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi\cdot 2^{100}}\sum_{k=0}^{100}(-1)^k\binom{100}{k}\int_0^{2\pi}e^{ix(100-2k)}dx.
\end{aligned}
$$

Notera att när $k \neq 50$ (så att $100-2k \neq 0$) så är

$$\int_0^{2\pi}e^{ix(100-2k)}dx = \left[\frac{e^{ix(100-2k)}}{i(100-2k)}\right]_0^{2\pi} = 0$$

(eftersom $e^{2\pi in} = 1$ för alla heltal n), medan för $k = 50$ är

$$\int_0^{2\pi}e^{ix(100-2k)}dx = \int_0^{2\pi}1\,dx = 2\pi.$$

Alla termer i summan ovan utom den mittersta ($k = 50$) är alltså noll, och uttrycket reduceras helt enkelt till

$$\frac{1}{2\pi\cdot 2^{100}}\left(0+\cdots+0+(-1)^{50}\binom{100}{50}\cdot 2\pi+0+\cdots+0\right) = \frac{1}{2^{100}}\binom{100}{50}.$$

Svar: $\frac{1}{2^{100}}\binom{100}{50}$.

(Sidospår: Med datorhjälp får man att detta är lika med

$$\frac{12611418068195524166851562157}{158456325028528675187087900672} = 0{,}0795892\ldots$$

Man kan också använda Stirlings formel $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$ för att visa att $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, vilket ger den skapliga approximationen $\frac{1}{2^{100}}\binom{100}{50} \approx \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \approx 0{,}07978$, eller mera allmänt att medelvärdet av $\sin^{2n}$ är c:a $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.)