Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2012-03-06 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter $(n = 3, 4, 5)$. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 2}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sin(2x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^2}-x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{1-\ln x}{x-e}$

3. Beräkna följande primitiva funktioner:

   (a) $\displaystyle\int \frac{4x^2+13x}{(x+2)^2(x-3)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^2 \sin 2x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

4. Sant eller falskt? Ge bevis eller motexempel för följande påståenden:

   (a) Om f är kontinuerlig i punkten a så är f deriverbar i a.
   (b) Om f är deriverbar i punkten a så är f kontinuerlig i a.
   (c) Om f är deriverbar och strängt växande på $\mathbf{R}$ så är $f' > 0$ på $\mathbf{R}$.

5. Beräkna $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(1+x^n)}$, där n är ett positivt heltal.

6. Låt P och Q vara de punkter på kurvan $y = x^2$ vars x-koordinater är a respektive $a + \dfrac{1}{a}$ (där $a > 0$). Kurvans tangenter i P och i Q bildar tillsammans med x-axeln en triangel. Bestäm de värden som denna triangels area kan anta.

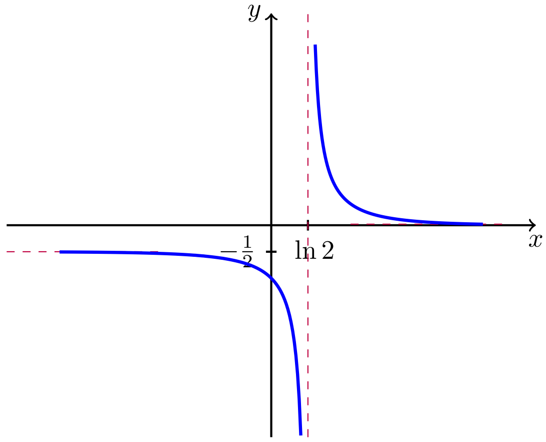
7. Låt $f(x) = x^3 + x$. Beräkna $\displaystyle\int_2^{10} f^{-1}(x)\,dx$.

Lösningsskisser för TATA41 2012-03-06

1. Funktionen är definierad (och kontinuerlig) för $x \neq \ln 2$, och uppfyller

$$\lim_{x\to(\ln 2)^\pm} f(x) = \lim_{t\to 2^\pm} \frac{1}{t-2} = \pm\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\tfrac{1}{2}.$$

Linjen $x = \ln 2$ är alltså lodrät asymptot till f:s graf, och linjerna $y = 0$ och $y = -\frac{1}{2}$ är vågräta asymptoter då $x \to \infty$ respektive $x \to -\infty$. Derivatan $f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x-2)^2}$ är negativ för alla $x \neq \ln 2$, så f är strängt avtagande på intervallet $]-\infty, \ln 2[$ och på intervallet $]\ln 2, \infty[$. Lokala extrempunkter saknas därmed.



2. (a) $\frac{\ln(1-3x)}{\sin 2x} = -\frac{3}{2}\frac{\ln(1+(-3x))}{(-3x)}\frac{2x}{\sin 2x} \to -\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (b) Eftersom $x \to \infty$ kan vi anta att $x > 0$, så att $\sqrt{x^2} = |x| = x$ (inte $-x$). Förlängning med konjugatet ger då $\frac{1}{\sqrt{x+x^2}-x} = \frac{\sqrt{x+x^2}+x}{(x+x^2)-x^2} = \frac{x\sqrt{\frac{1}{x}+1}+x}{x} = \sqrt{\frac{1}{x}+1}+1 \to \sqrt{0+1}+1 = 2$ då $x \to \infty$.

   (c) Variabelbytet $t = x - e$ ger $\frac{1-\ln x}{x-e} = \frac{1-\ln(e+t)}{t} = \frac{1-\ln(e(1+t/e))}{t} = \frac{1-\left(\ln e+\ln(1+t/e)\right)}{t} = \frac{-\ln(1+t/e)}{t} = -\frac{1}{e}\frac{\ln(1+t/e)}{t/e} \to -\frac{1}{e}$ då $t \to 0$ (dvs då $x \to e$), enligt standardgränsvärde.

   Svar: (a) $-\frac{3}{2}$ (b) 2 (c) $-\frac{1}{e}$.

3. (a) Partialbråksuppdelning ger $\int \frac{4x^2+13x}{(x+2)^2(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{3}{x-3}\right) dx = \ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + 3\ln|x-3| + C$.

   (b) Upprepad partiell integration ger $\int x^2 \sin 2x\,dx = x^2 \cdot \frac{-\cos 2x}{2} - 2x \cdot \frac{-\sin 2x}{4} + 2 \cdot \frac{\cos 2x}{8} + C = \frac{x}{2}\sin 2x + \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\cos 2x + C$.

   (c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{(x+1)^2-1}}\,dx = \left[\begin{smallmatrix} t=x+1 \\ dt=dx \end{smallmatrix}\right] = \int \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \sqrt{t^2-1} - \ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C = \sqrt{x^2+2x} - \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right| + C$.

4. (a) Falskt. Exempelvis är $f(x) = |x|$ kontinuerlig överallt (speciellt i $x = 0$), men inte deriverbar i $x = 0$.

   (b) Sant. Bevis: Antag att f är deriverbar i punkten a. Detta betyder (per definition) att gränsvärdet $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existerar, så att

$$f(x) - f(a) = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{(x - a)}_{\to 0} \to 0 \qquad \text{då } x \to a.$$

   Men att $f(x) - f(a) \to 0$ då $x \to a$ är samma sak som att $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$, vilket (per definition) innebär att f är kontinuerlig i punkten a.

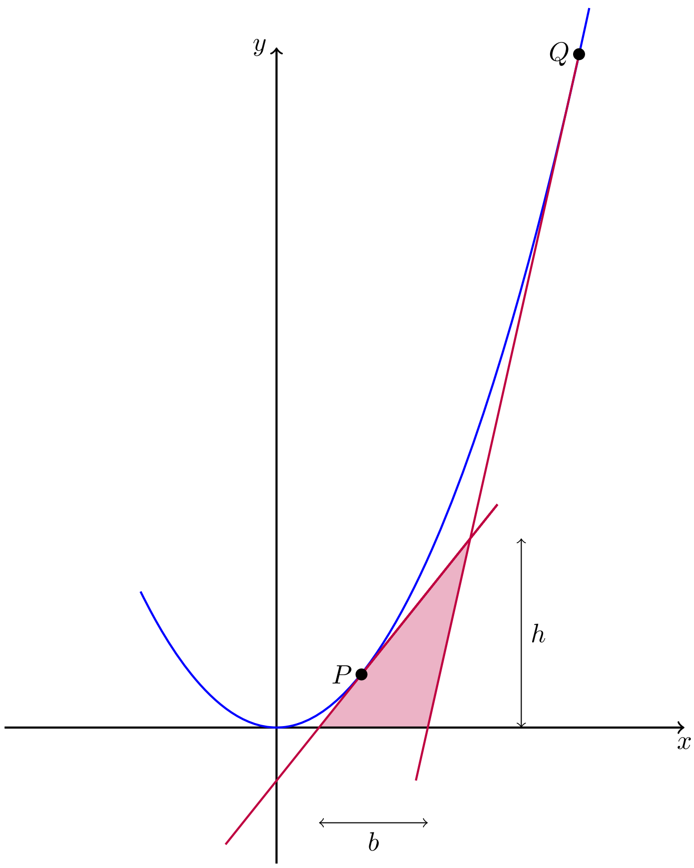
   (c) Falskt. Exempelvis är $f(x) = x^3$ deriverbar ($f'(x) = 3x^2$) och strängt växande (ty om $a < b$ så är $a^3 < b^3$), men $f'(0) = 0$.

5. Variabelbyte ger

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{dx}{x(1+x^n)} &= \int_2^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{x^n(1+x^n)} = \begin{bmatrix} t = x^n \ (x > 0) \\ dt = n\,x^{n-1}\,dx \\ x = 2 \Leftrightarrow t = 2^n \\ x \to \infty \Leftrightarrow t \to \infty \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n}\int_{2^n}^\infty \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{n}\int_{2^n}^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt \\
&= \frac{1}{n} \lim_{\omega\to\infty} \Big[\ln|t| - \ln|1+t|\Big]_{2^n}^{\omega} \\
&= \frac{1}{n} \lim_{\omega\to\infty} \Big[-\ln\big|1 + \tfrac{1}{t}\big|\Big]_{2^n}^{\omega} = \frac{\ln(1+2^{-n})}{n}.
\end{aligned}$$

6. Kurvans tangent i punkten P har ekvationen $y = kx+m$, där $k = \frac{d}{dx}(x^2)|_{x=a} = 2a$ och m bestäms av att $P = (a, a^2)$ ska satisfiera ekvationen: $a^2 = ka + m$. Detta ger $m = -a^2$, så tangentens ekvation är $y = 2ax - a^2$. Tangenten i punkten Q fås på precis samma sätt, fast med a utbytt mot $a + \frac{1}{a}$, dvs $y = 2\left(a + \frac{1}{a}\right)x - \left(a + \frac{1}{a}\right)^2$. Genom att sätta $y = 0$ ser man att tangenterna skär x-axeln i $x_1 = \frac{1}{2}a$ respektive $x_2 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$. Sträckan mellan dessa två punkter utgör basen i den triangel som frågan gäller; alltså $b = x_2 - x_1 = \frac{1}{2a}$. Triangelns höjd h är lika med y-koordinaten för skärningspunkten mellan de två tangenterna; villkoren $h = 2ax - a^2 = 2\left(a + \frac{1}{a}\right)x - \left(a + \frac{1}{a}\right)^2$ ger först $x = \frac{a}{2}\left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - a^2\right) = \frac{a}{2}\left(2 + \frac{1}{a^2}\right)$ och sedan $h = 2a \cdot \frac{a}{2}\left(2 + \frac{1}{a^2}\right) - a^2 = a^2 + 1$. Triangelns area är alltså $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2a} \cdot (a^2+1) = \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, vilket vi döper till $f(a)$. Vi ser att $f(a) \to \infty$ både då $a \to 0^+$ och då $a \to \infty$, och derivatan $f'(a) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{(a-1)(a+1)}{4a^2}$ har för $a > 0$ teckenschemat $-0+$, med nollstället i $a = 1$. Detta visar att $f(a)$, för $a > 0$, antar alla värden större än eller lika med $f(1) = \frac{1}{2}$.

   Svar: Triangelns area A kan anta alla värden $A \geq \frac{1}{2}$.

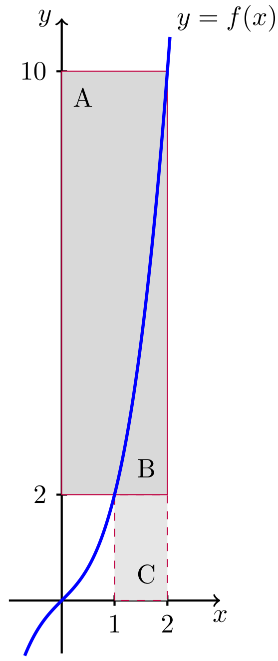


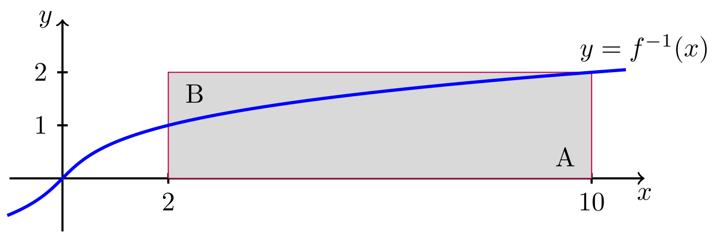
7. Alternativ 1. Variabelbyte:

$$\int_2^{10} f^{-1}(x)\,dx = \left[\begin{array}{c} x = f(t) = t^3 + t \\ dx = (3t^2+1)dt \\ f^{-1}(x) = t \\ x = 2 \Leftrightarrow t = 1 \\ x = 10 \Leftrightarrow t = 2 \end{array}\right]$$

$$= \int_1^2 t(3t^2+1)dt = \left[\frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2\right]_1^2 = \frac{51}{4}$$

Alternativ 2. Tänk geometriskt: grafen för f^{-1} fås genom att spegla grafen för f i diagonalen $y = x$.





Värdet av integralen $\int_2^{10} f^{-1}(x)\,dx$ är arean av området A i den nedre figuren. Områdena A och B utgör tillsammans en rektangel med arean $8 \cdot 2 = 16$. Arean av området B kan vi räkna ut genom att titta i den övre figuren; B och C blir tillsammans $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^3+x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{21}{4}$, alltså har B arean $\frac{21}{4} - 2 = \frac{13}{4}$. Detta ger att A har arean $16 - \frac{13}{4} = \frac{51}{4}$.

Svar: 51/4.