Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2012-01-14 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = e^{x/(1+x^2)}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök gränsvärdena

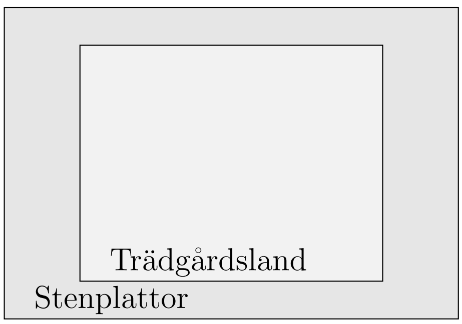
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x+2^x)^2+3^x}{1+4^{x+1}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+3)-\ln x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$.

3. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{4x}{x^2+2x-3}$ (b) $x\ln(x+1)$ (c) $\dfrac{\cos x}{3-2\cos^2 x}$.

4. Hur många olika reella rötter har ekvationen $2\ln(1+2x) - \ln\left(1+x^2\right) = a$ för olika värden på a?

5. Margarita bor i ett villaområde i Linköpings omnejd. På baksidan av hennes tomt vill hon anlägga ett rektangulärt trädgårdsland på 50 m^2 för ekologisk odling. Kring detta tänker hon lägga stenplattor och av oklara skäl vill hon att längs två av de motstående sidorna ska platt-raderna vara 1 meter breda och längs de andra båda sidorna ska de vara 2 meter breda. Vilka sidlängder ska trädgårdslandet ha för att det ska gå åt så lite material (stenplattor) som möjligt?



6. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

7. Visa att för varje heltal $n > 0$ finns exakt en positiv rot x_n till ekvationen $x^n + x = 1$. Visa även att talföljden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är växande och att $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Lösningsskisser för TATA41 2012-01-14

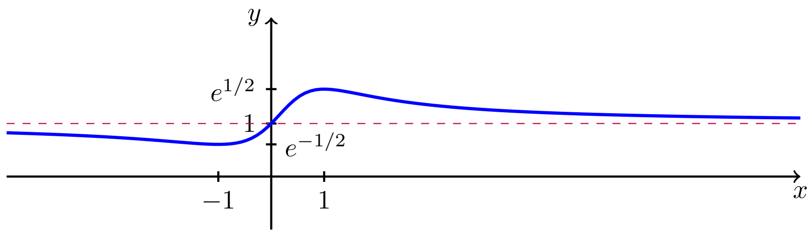
1. Funktionen är definierad (och kontinuerlig) för alla reella x, och uppfyller

$$f(x) = \exp \frac{x}{1+x^2} = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}\right) \to \exp(0 \cdot 1) = 1 \qquad \text{då } x \to \pm\infty.$$

Linjen $y = 1$ är alltså vågrät asymptot till f:s graf, medan lodräta asymptoter saknas. Derivatan $f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = f(x)\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ har samma tecken som $1 - x^2$, eftersom faktorerna $f(x)$ och $(1 + x^2)^2$ är positiva för alla x:

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min. $f{=}e^{-1/2}$	$\nearrow$	lok. max. $f{=}e^{1/2}$	$\searrow$

Detta ger följande utseende på grafen:



2. (a) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+2}{x+3} \to \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2}$ då $x \to -1$.

   (b) Förkorta med 4^x (den dominerande termen): $\frac{(x+2^x)^2+3^x}{1+4^{x+1}} = \frac{(x/2^x+1)^2+(3/4)^x}{4^{-x}+4} \to \frac{1^2+0}{0+4} = \frac{1}{4}$ då $x \to \infty$, enligt standardgränsvärden.

   (c) Förläng med konjugatuttrycket:

$$\frac{\ln(x+3) - \ln x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) \ln \frac{x+3}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{x}} \to \frac{3}{2} \cdot (1+1) \cdot 1 = 3$$

   då $x \to \infty$, enligt standardgränsvärden.

   Svar: (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 3.

3. (a) $\int \frac{4x\,dx}{x^2+2x-3} = \int\left(\frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-1}\right)dx = 3\ln|x+3| + \ln|x-1| + C$.

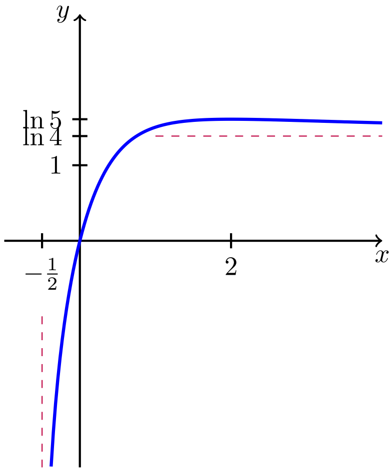
   (b) $\int x\ln(x+1)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$.

   (c) Variabelbytet $t = \sin x$ ger $\int \frac{\cos x\,dx}{3-2\cos^2 x} = \int \frac{dt}{3-2(1-t^2)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sin x) + C$.

4. Sätt $f(x) = 2\ln(1+2x) - \ln(1+x^2)$. Denna funktion är definierad för $x > -\frac{1}{2}$ och har derivatan $f'(x) = \frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{4-2x}{(1+2x)(1+x^2)}$, vilket ger teckentabellen

x	$-\frac{1}{2}$		2	
$f'(x)$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	ej def.	$\nearrow$	lok. max. $f{=}\ln 5$	$\searrow$

Dessutom gäller att $f(x) = \ln \frac{(1+2x)^2}{1+x^2} = \ln \frac{(\frac{1}{x}+2)^2}{\frac{1}{x^2}+1} \to \ln 4$ då $x \to \infty$, samt $f(x) \to -\infty$ då $x \to (-\frac{1}{2})^+$. Grafen ser alltså ut såhär:



Genom att räkna antalet skärningar med linjen $y = a$ för olika värden på a ser man att ekvationen $f(x) = a$ har en lösning om $a \leq \ln 4$ eller om $a = \ln 5$, två lösningar om $\ln 4 < a < \ln 5$, och ingen lösning om $a > \ln 5$.

5. Om x och y är trädgårdslandets sidlängder mätta i meter (med $xy = 50$), så är $x + 4$ och $y + 2$ sidlängderna hos den omgivande rektangeln (trädgårdsland plus stenplattor). Arean för det stenlagda området blir alltså $(x + 4)(y + 2) - xy = 2x + 4y + 8$. För att minimera detta, eliminera y och studera $f(x) = 2x + 4 \cdot 50/x + 8$ (för $x > 0$). Derivatan är $f'(x) = 2 - 200/x^2$, vilket ger teckentabellen

x	0		10	
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	lok. min. f=48	$\nearrow$

Av detta ser man att $f(10) = 48$ är globalt minimum.

Svar: Sidlängderna ska vara 10 och 5 meter (längs den smala resp. den breda delen av bården).

6. Det går att göra på minst fyra sätt:

(i) Variabelbytet $t = x + \sqrt{1+x^2}$ ger $x = \frac{t-1/t}{2}$ så att $dx = \frac{1+1/t^2}{2}\,dt$ och $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1+1/t^2}{2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4}t^{-2}\right]_1^{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$.

(ii) En närbesläktad variant är att utnyttja ”hyperboliska ettan” $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$ för att förenkla rotuttrycket. Variabelbytet $x = \sinh\psi$ (med invers $\psi = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$) ger $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh\psi\,d\psi}{\sinh\psi+\cosh\psi} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\frac{1}{2}(e^{\psi}+e^{-\psi})\,d\psi}{e^{\psi}} = \left[\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}e^{-2\psi}\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})}$ osv.

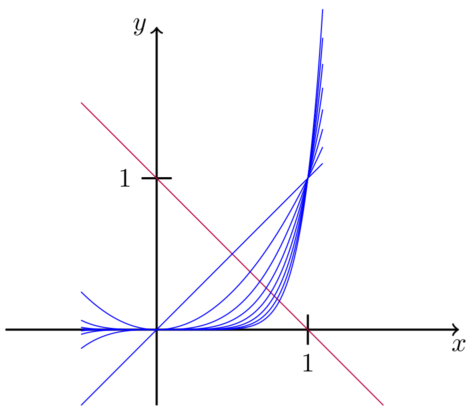
(iii) En annan identitet som förenklar rotuttrycket är $1+\tan^2\phi = 1/\cos^2\phi$. Variabelbytet $x=\tan\phi$ följt av $s=\sin\phi$ ger en rationell integrand: $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\frac{1}{\cos^2\phi}\,d\phi}{\tan x+\frac{1}{\cos\phi}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos\phi\,d\phi}{\cos^2\phi(\sin\phi+1)} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{(1-s^2)(1+s)} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \big(\frac{1}{2(1+s)^2}+\frac{1}{4(1+s)}+\frac{1}{4(1-s)}\big)ds = \big[-\frac{1}{2(1+s)}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+s}{1-s}\big]_0^{1/\sqrt{2}}$ osv.

(iv) Ännu en metod är att förlänga med konjugatet, vilket ger $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1}$, så att man reducerar problemet till att beräkna $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$. Detta kan i sin tur göras på flera sätt, t.ex. genom att skjuta in en etta och partialintegrera (jfr. Ex. 5.40 i Forsling & Neymark).

Svaret kan förstås skrivas på många olika sätt; vi har t.ex. sambanden $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ och $\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$.

Svar: $\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$.

7. Ekvationen kan skrivas som $x^n = 1-x$, och påståendena verkar troliga om man i en figur begrundar var kurvorna $y=x^n$ för $(n=1,2,3,\dots)$ skär linjen $y=1-x$:



För stringenta bevis, låt $f_n(x)=x^n+x$ och notera att f_n är kontinuerlig samt att $f_n(0)=0$ och $f_n(1)=2$; enligt satsen om mellanliggande värde finns det då minst en punkt mellan 0 och 1 där $f_n(x)=1$, och eftersom f_n är strängt växande för $x\geq 0$ så finns det högst ett positivt x där $f_n(x)=1$. Alltså finns det exakt en sådan punkt x_n, och den ligger mellan 0 och 1 vilket gör att $f_{n+1}(x_n)=x_n^{n+1}+x_n < x_n^n+x_n = f_n(x_n)=1$. Vid $x=x_n$ har f_{n+1} alltså inte hunnit upp till värdet 1, utan den punkt $x=x_{n+1}$ där detta inträffar måste komma senare (eftersom f_{n+1} är växande); med andra ord är $x_n<x_{n+1}$. Eftersom vi nu har visat att följden $(x_n)_{n\geq 1}$ är växande och uppåt begränsad (av 1, eftersom alla x_n uppfyller $0<x_n<1$) så kan vi dra slutsatsen att den har ett gränsvärde L som uppfyller $0<L\leq 1$. För att visa att $L=1$ antar vi att $L<1$ och härleder en motsägelse: i detta fall är $\epsilon=1-L>0$ och $L^n\to 0$ då $n\to\infty$; det finns då enligt gränsvärdesdefinitionen ett N sådant att $L^n<\epsilon$ för $n\geq N$. För dessa n är då $f_n(L)=L^n+L<\epsilon+L=(1-L)+L=1$. Men eftersom f_n är växande och $L>x_n$ så måste $f_n(L)\geq f_n(x_n)=1$, vilket ger den önskade motsägelsen.