Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2011-08-23 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{1-x}{x+3} + \ln(x+2)$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Beräkna följande primitiva funktioner:

   (a) $\displaystyle\int \frac{(5+2\sin x)\cos x}{\sin^3 x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \cos x \cos 5x\,dx$ (c) $\displaystyle\int x^2 \arctan 3x\,dx$

3. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\sin 3x}{\ln(1+4x^2)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{e^{2x}+2e^x-3} - \sqrt{e^{2x}-4e^x+5}\right)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{\ln x}$

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{4x+10}{x^3+2x^2+5x}\,dx$.

5. Visa att
$$2(\sqrt{n}-1)e^{\sqrt{n}} < e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + e^{\sqrt{3}} + \cdots + e^{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}\,e^{\sqrt{n}}$$
för alla heltal $n \geq 1$.

6. Finn alla räta linjer genom origo som skär (eller tangerar) kurvan $y = \dfrac{x^2+x}{x-1}\,e^{x/4}$ i tre punkter.

7. Antag att $a_k > 0$ för $1 \leq k \leq n$, och att $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$. Visa att ekvationen $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{u_k - x} = 1$ har n stycken reella lösningar.

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: 9MA221
Provkod: STN1

Tentamen i Analys och linjär algebra: Envariabelanalys 1

2011-08-23 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg G räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. För betyg VG räcker 16 poäng.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{1-x}{x+3} + \ln(x+2)$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Beräkna följande primitiva funktioner:

   (a) $\displaystyle\int \frac{(5+2\sin x)\cos x}{\sin^3 x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \cos x \cos 5x\,dx$ (c) $\displaystyle\int x^2 \arctan 3x\,dx$

3. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\sin 3x}{\ln(1+4x^2)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{e^{2x}+2e^x-3} - \sqrt{e^{2x}-4e^x+5}\right)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{\ln x}$

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{4x+10}{x^3+2x^2+5x}\,dx$.

5. Visa att
$$2(\sqrt{n}-1)e^{\sqrt{n}} < e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + e^{\sqrt{3}} + \cdots + e^{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}\,e^{\sqrt{n}}$$
för alla heltal $n \geq 1$.

6. Finn alla räta linjer genom origo som skär (eller tangerar) kurvan $y = \dfrac{x^2+x}{x-1}\,e^{x/4}$ i tre punkter.

7. Antag att $a_k > 0$ för $1 \leq k \leq n$, och att $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$. Visa att ekvationen $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{u_k - x} = 1$ har n stycken reella lösningar.

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: 9MA321
Provkod: STN1

Tentamen i Analys och linjär algebra: Envariabelanalys 1

2011-08-23 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg G räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. För betyg VG räcker 16 poäng.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{1-x}{x+3} + \ln(x+2)$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Beräkna följande primitiva funktioner:

   (a) $\displaystyle\int \frac{(5+2\sin x)\cos x}{\sin^3 x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \cos x \cos 5x\,dx$ (c) $\displaystyle\int x^2 \arctan 3x\,dx$

3. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\sin 3x}{\ln(1+4x^2)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+2e^x-3} - \sqrt{e^{2x}-4e^x+5}\right)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{\ln x}$

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{4x+10}{x^3+2x^2+5x}\,dx$.

5. Visa att
$$2(\sqrt{n}-1)e^{\sqrt{n}} < e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + e^{\sqrt{3}} + \cdots + e^{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}\,e^{\sqrt{n}}$$
för alla heltal $n \geq 1$.

6. Finn alla räta linjer genom origo som skär (eller tangerar) kurvan $y = \dfrac{x^2+x}{x-1}e^{x/4}$ i tre punkter.

7. Antag att $a_k > 0$ för $1 \leq k \leq n$, och att $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$. Visa att ekvationen $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{u_k - x} = 1$ har n stycken reella lösningar.

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: LIMAA4
Provkod: STN1

Tentamen i Analys och linjär algebra: Envariabelanalys 1

2011-08-23 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg G räcker 8 poäng och 3 godkända uppgifter. För betyg VG räcker 16 poäng.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{1-x}{x+3} + \ln(x+2)$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Beräkna följande primitiva funktioner:

   (a) $\displaystyle\int \frac{(5+2\sin x)\cos x}{\sin^3 x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \cos x \cos 5x\,dx$ (c) $\displaystyle\int x^2 \arctan 3x\,dx$

3. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\sin 3x}{\ln(1+4x^2)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+2e^x-3}-\sqrt{e^{2x}-4e^x+5}\right)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{\ln x}$

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{4x+10}{x^3+2x^2+5x}\,dx$.

5. Visa att
$$2(\sqrt{n}-1)e^{\sqrt{n}} < e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + e^{\sqrt{3}} + \cdots + e^{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}\,e^{\sqrt{n}}$$
för alla heltal $n \geq 1$.

6. Finn alla räta linjer genom origo som skär (eller tangerar) kurvan $y = \dfrac{x^2+x}{x-1}e^{x/4}$ i tre punkter.

7. Antag att $a_k > 0$ för $1 \leq k \leq n$, och att $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$. Visa att ekvationen $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{u_k - x} = 1$ har n stycken reella lösningar.

Lösningsskisser för TATA41 2011-08-23

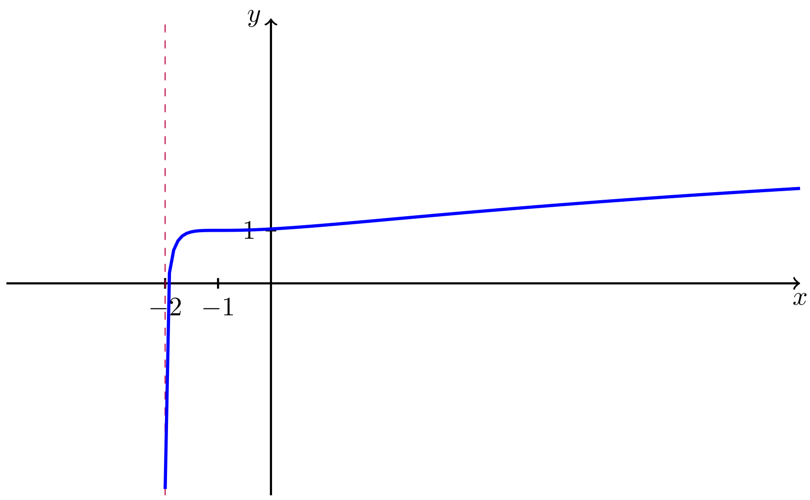
1. Funktionen $f(x) = \frac{1-x}{x+3} + \ln(x+2)$ är definierad för $x > -2$. Den uppfyller

$$f(x) \to -\infty \quad \text{då } x \to -2^+, \qquad f(x) \to +\infty \quad \text{då } x \to +\infty.$$

   Linjen $x = -2$ är alltså en lodrät asymptot till f:s graf, medan vågräta asymptoter saknas. (Obs. att linjen $x = -3$ inte är någon asymptot, eftersom den ligger i området där f inte är definierad.)

   Derivatan $f'(x) = \frac{-4}{(x+3)^2} + \frac{1}{x+2} = \frac{(x+1)^2}{(x+3)^2(x+2)}$ är positiv för alla $x > -2$ utom för $x = -1$, där den är noll. Alltså är $f(x)$ strängt växande, med en terrasspunkt i $x = -1$.

   Vi kan även notera att $f(-1) = 1$, samt att f går mot oändligheten ganska sakta (logaritmiskt; för stora värden på x gäller $f(x) \approx -1 + \ln x$). Detta ger följande utseende på grafen:



2. (a) Variabelbytet $t = \sin x$ ger $\int \frac{(5+2\sin x)\cos x}{\sin^3 x}\,dx = \int \left(\frac{5}{t^3} + \frac{2}{t^2}\right) dt = -\frac{5}{2t^2} - \frac{2}{t} + C = -\frac{5}{2\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x} + C.$

   (b) *Prosthaphaeresis*, dvs trigonometrisk produkt-till-summa-omskrivning, ger $\int \cos x \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x + \cos 6x)\,dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$. Alternativt kan man partialintegrera två gånger och lösa ut den sökta integralen; då får man svaret på formen $\frac{5}{24}\cos x \sin 5x - \frac{1}{24}\sin x \cos 5x + C$.

   (c) Partiell integration, och sedan polynomdivision, ger $\int x^2 \arctan 3x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \arctan 3x - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{3}{1+9x^2}\,dx = \frac{1}{3}x^3 \arctan 3x - \frac{1}{9}\int \left(x - \frac{x}{1+9x^2}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 \arctan 3x - \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{162}\ln(1+9x^2) + C.$

3. (a) $\frac{(e^{2x}-1)\sin 3x}{\ln(1+4x^2)} = \frac{2\cdot 3}{4}\,\frac{e^{2x}-1}{2x}\,\frac{\sin 3x}{3x}\,\frac{4x^2}{\ln(1+4x^2)} \to \frac{6}{4}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{2}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (b) Byt till variabeln $t = e^x$. Att $x \to \infty$ innebär att även $t \to \infty$. Vi kan därmed anta att $t > 0$, så att $\sqrt{t^2} = t$. Gränsvärdet fås nu genom att förlänga med konjugatuttrycket: $\sqrt{t^2+2t-3} - \sqrt{t^2-4t+5} = \frac{(t^2+2t-3)-(t^2-4t+5)}{\sqrt{t^2+2t-3}+\sqrt{t^2-4t+5}} = \frac{6-\frac{8}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{t}+\frac{5}{t^2}}} \to \frac{6}{1+1} = 3$ då $t \to \infty$.

(c) Inför variabeln $h = x - 1$, som går mot noll då $x \to 1$. Detta ger $\frac{\ln(2x-1)}{\ln x} = \frac{\ln(2(1+h)-1)}{\ln(1+h)} = 2\frac{\ln(1+2h)}{2h}\frac{h}{\ln(1+h)} \to 2 \cdot 1 \cdot 1$ då $h \to 0$, enligt standardgränsvärden.

Svar: (a) $\frac{3}{2}$ (b) 3 (c) 2.

4. Vi bestämmer först primitiv funktion med hjälp av partialbråksuppdelning och variabelbytet $t = x+1$: $\int \frac{4x+10}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+2x+5}\right) dx = 2\ln|x| - \int \frac{2(t-1)}{t^2+4}\,dt = \ln\left|x^2\right| - \ln\left|t^2+4\right| + \arctan\frac{t}{2} + C = \ln\left|\frac{x^2}{x^2+2x+5}\right| + \arctan\frac{x+1}{2} + C.$ Insättning av gränser ger sedan $\int_1^\infty \frac{4x+10}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\ln\frac{1}{1+2x^{-1}+5x^{-2}} + \arctan\frac{x+1}{2}\right]_1^R = (\ln 1 + \frac{\pi}{2}) - (\ln\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}).$
Svar: $\frac{\pi}{4} + \ln 8$.

5. Eftersom $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ är en strängt växande funktion så gäller uppskattningen

$$\int_1^n f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f(n) < \int_1^n f(x)dx + f(n).$$

(Rita figur!) Insättning av den primitiva funktionen $\int f(x)dx = \int e^{\sqrt{x}}dx = \left[\ t = \sqrt{x}\ \right] = \int e^t\, 2t\, dt = 2(t-1)e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$ ger

$$2(\sqrt{n}-1)e^{\sqrt{n}} < \sum_{k=1}^{n} e^{\sqrt{k}} < \underbrace{2(\sqrt{n}-1)e^{\sqrt{n}} + e^{\sqrt{n}}}_{=(2\sqrt{n}-1)e^{\sqrt{n}}},$$

vilket t.o.m. är lite starkare än vad som skulle visas. (Lägg till ytterligare $e^{\sqrt{n}}$ till högerledet för att erhålla olikheten i uppgiften.)

6. Punkterna där linjen $y = kx$ skär eller tangerar kurvan fås genom att lösa ekvationen $\frac{x^2+x}{x-1}\, e^{x/4} = kx$. En lösning är $x = 0$, oavsett vad k är. **Övriga** lösningar ges av

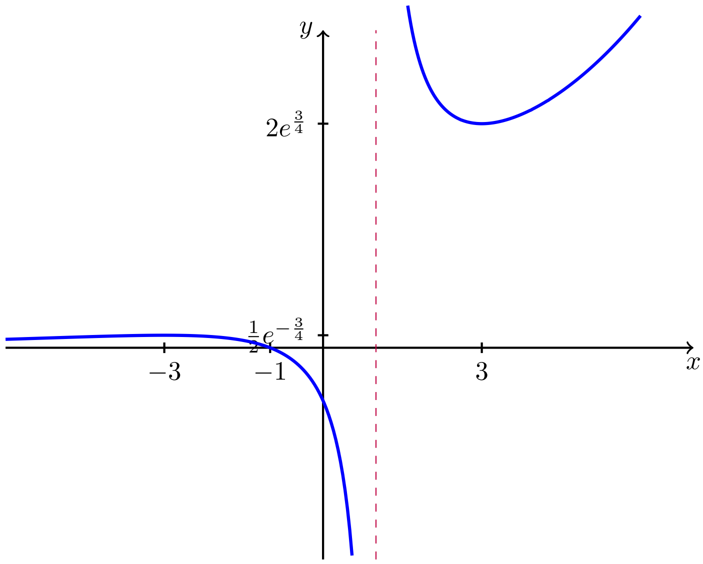
$$\frac{x+1}{x-1}\, e^{x/4} = k.$$

Om vi döper vänsterledet här till $f(x)$ så är frågan alltså för vilka värden på k som denna ekvation $f(x) = k$ har **två** olika och nollskilda lösningar.

Derivatan är $f'(x) = \frac{1}{4}e^{x/4}(x-3)(x+3)(x-1)^{-2}$, vilket ger nedanstående teckenschema:

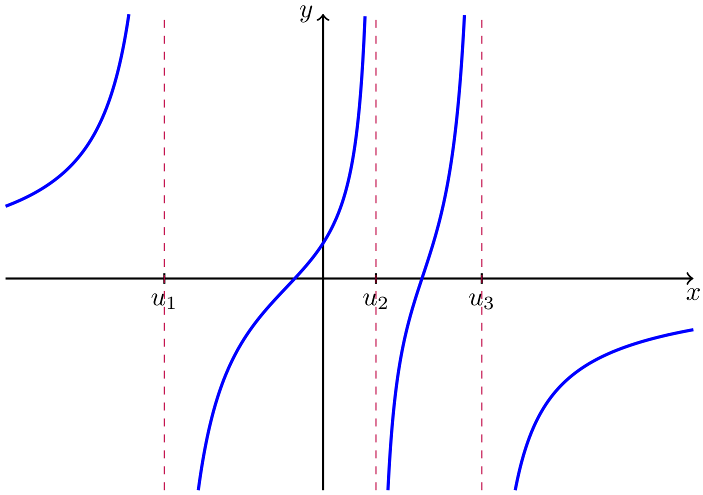
x		-3		1		3	
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max. $f=\frac{1}{2}e^{-3/4}$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min. $f=2e^{3/4}$	$\nearrow$

Vidare ser vi att $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$ då $x \to +\infty$, och $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 1^{\pm}$. Grafen för f, ur vilken vi kan avläsa svaret genom att skära den med linjen $y = k$ för olika värden på k, ser därmed ut såhär:



Svar: Alla linjer $y = kx$ där $0 < k < \frac{1}{2}e^{-3/4}$ eller $k > 2e^{3/4}$.

7. Funktionen $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{u_k - x}$ är definierad för $x \neq u_1, u_2, \ldots, u_k$ och har derivatan $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(u_k - x)^2}$. På grund av förutsättningen $a_k > 0$ är $f' > 0$ där den är definierad, och f är därmed strängt växande i vart och ett av de $n + 1$ intervall som punkterna $u_1, \ldots, u_n$ delar in tallinjen i (alltså $x < u_1$, $u_1 < x < u_2$, $u_2 < x < u_3$, $\ldots$, $u_n < x$). Dessutom gäller att $f(x) \to 0$ då $x \to \pm\infty$ samt $f(x) \to \mp\infty$ då $x \to u_k^{\pm}$, så f:s graf ser ut något i den här stilen (illustrerat i fallet $n = 3$):



Eftersom f växer kontinuerligt från 0 till $+\infty$ i intervallet $x < u_1$ så måste f anta värdet 1 exakt en gång där (enligt satsen om mellanliggande värde). Enligt samma resonemang (fast med $-\infty$ istället för 0) har ekvationen $f(x) = 1$ exakt en lösning i vart och ett av de $n - 1$ intervallen $u_k < x < u_{k+1}$. Däremot finns det ingen lösning i intervallet $u_n < x$, eftersom $f < 0$ där. Totalt har ekvationen $f(x) = 1$ alltså n stycken reella lösningar, vilket skulle visas.