Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2011-06-08 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \arctan(x+1) + \dfrac{1}{x+2}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(2^x+1)^2}{3\cdot 4^x - \ln x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x)^3-1}{(e^x)^2-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{4x^2-\pi^2}$.

3. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{x}{x^2+x-2}$ (b) $\cos^3 x$ (c) $\dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

4. Hur många olika lösningar har ekvationen $x\ln x - 2x = 1$?

5. Beräkna $\displaystyle\int_4^\infty \frac{\ln\left(\sqrt{x}-1\right)}{x^2}\,dx$.

6. Formulera och bevisa produktregeln för derivator. För poäng krävs formulering av för beviset relevant gränsvärde.

7. Funktionen f är definierad för alla reella tal och har följande egenskaper:

   - $V_f =]-1, \infty[$
   - f saknar invers
   - f har kontinuerlig derivata
   - $f'(x) = 0$ om och endast om $x = \pm 2$
   - $f(-2) = 0$, $f(2) = 4$.

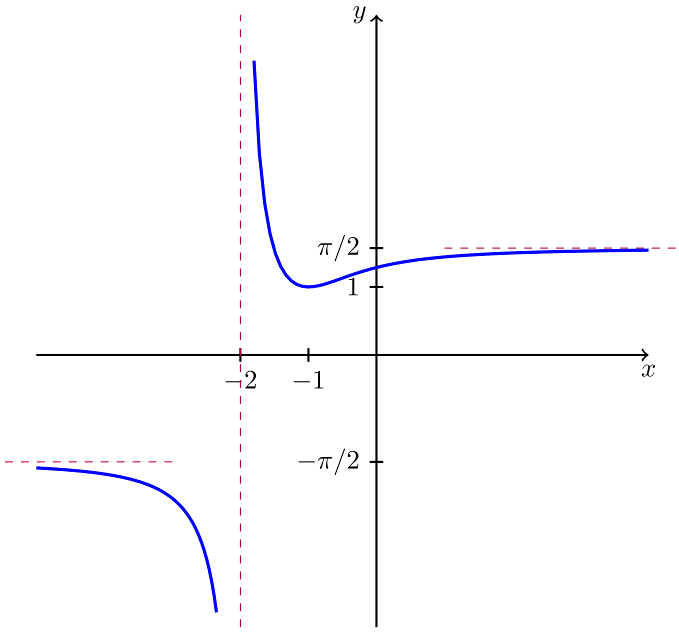
   Låt $g(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ och bilda $h(x) = f(g(x))$. Skissa grafen till h, så att alla väsentliga egenskaper framgår.

Lösningsskisser för TATA41 2011-06-08

1. $f(x) = \arctan(x+1) + \frac{1}{x+2}$ medför att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\pi/2$, så linjerna $y = \pi/2$ och $y = -\pi/2$ är horisontella asymptoter för grafen. Vidare är $\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, så linjen $x = -2$ är en lodrät asymptot. Derivatan $f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{2(x+1)}{(1+(x+1)^2)(x+2)^2}$ ger upphov till följande teckentabell:

x		-2		-1	
$2(x+1)$	$-$		$-$	0	$+$
$1+(x+1)^2$	$+$		$+$		$+$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min. $f=1$	$\nearrow$

Grafen får därmed följande utseende:



2. (a) $\frac{(2^x+1)^2}{3\cdot 4^x - \ln x} = \frac{(1+2^{-x})^2}{3 - \frac{\ln x}{4^x}} \to \frac{(1+0)^2}{3-0} = \frac{1}{3}$ då $x \to \infty$ (ty $\frac{\ln x}{a^x} \to 0$ för $a > 1$ enligt standardgränsvärden).

   (b) $\frac{(e^x)^3-1}{(e^x)^2-1} = \frac{3}{2}\frac{e^{3x}-1}{3x}\frac{2x}{e^{2x}-1} \to \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1$ då $x \to 0$ enligt standardgränsvärde. Alternativ lösning: $t = e^x \to 1$ då $x \to 0$, och $\frac{(e^x)^3-1}{(e^x)^2-1} = \frac{t^3-1}{t^2-1} = \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{t^2+t+1}{t+1} \to \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$ då $t \to 1$.

   (c) Låt $t = x - \frac{\pi}{2}$. Detta ger $\frac{\cos(2x+\pi/2)}{4x^2-\pi^2} = \frac{\cos(2(t+\pi/2)+\pi/2)}{4(t+\pi/2)^2-\pi^2} = \frac{\cos(2t+3\pi/2)}{4(t^2+\pi t)} = \frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{1}{2(t+\pi)} \to 1\cdot\frac{1}{2\pi}$ då $t \to 0$ (dvs då $x \to \pi/2$), enligt standardgränsvärde.

   Svar: (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{1}{2\pi}$.

3. (a) $\int \frac{x\,dx}{x^2+x-2} = \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+2)} = \int \left(\frac{1/3}{x-1} + \frac{2/3}{x+2}\right) dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+2| + C$.

   (b) $\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$. Alternativ lösning: $\int \cos^3 x\,dx = \int (\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x)\,dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$ (vilket är samma sak, bara skrivet på annan form).

   (c) Variabelbytet $x - 1 = t$ ger $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \int \frac{(t+1)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2} + \arcsin t + C = -\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1) + C$.

4. Sätt $f(x) = x \ln x - 2x$; denna funktion är definierad för $x > 0$. Om man skriver $f(x) = x(\ln x - 2)$ blir det uppenbart att f är negativ i intervallet $0 < x < e^2$, så ekvationen $f(x) = 1$ har inga lösningar där. För $x \geq e^2$ är derivatan $f'(x) = \ln x - 1$ positiv, så f är strängt växande där. Ekvationen $f(x) = 1$ har alltså högst en lösning. Eftersom f är kontinuerlig, $f(e^2) = 0$ och $f(e^3) = e^3 > 1$, så finns det enligt satsen om mellanliggande värde minst en lösning till ekvationen $f(x) = 1$ i intervallet $e^2 < x < e^3$. Slutsats: ekvationen har exakt en reell lösning.

   Alternativ angreppssätt: rita grafen på vanligt sätt (notera gränsvärdena $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$) och läs av svaret i figuren.

5. Variabelbytet $x = t^2$ $(t > 0)$ ger $dx = 2t\,dt$ och därmed

$$\int_4^\infty \frac{\ln(\sqrt{x} - 1)}{x^2}\,dx = \int_2^\infty 2t^{-3}\ln(t-1)\,dt.$$

   Primitiv funktion beräknas med partiell integration och partialbråk:

$$\begin{aligned}\int 2t^{-3}\ln(t-1)\,dt &= -t^{-2}\ln(t-1) + \int t^{-2}\,\frac{1}{t-1}\,dt \\ &= -\frac{\ln(t-1)}{t^2} + \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= -\frac{\ln(t-1)}{t^2} + \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + \frac{1}{t} + C.\end{aligned}$$

   Insättning av gränserna ger slutligen att integralens värde är

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{-\ln(\omega-1)}{\omega^2} + \ln\left|1 - \frac{1}{\omega}\right| + \frac{1}{\omega}\right) - \left(0 + \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)& \\ = 0 + 0 + 0 - \ln\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = \ln 2 - \tfrac{1}{2}&.\end{aligned}$$

   (Rimlighetskontroll: Integranden är positiv för $x > 4$ eftersom $\sqrt{x} - 1 > 1$. Svaret måste alltså bli positivt, och det är det också, eftersom $\ln 2 \approx 0{,}69 > \frac{1}{2}$.)

6. Se godtycklig lärobok i analys. (T.ex. Forsling & Neymark, Sats 4.2(c); beviset står på s. 199.)

7. Uppgifterna om f låter oss genast ställa upp en ofullständig teckentabell:

x		-2		2	
$f'(x)$	$\pm?$	0	$\pm?$	0	$\pm?$
$f(x)$		0		4	

   Eftersom $0 < 4$ så måste f vara växande i mittenintervallet $-2 < x < 2$:

x		-2		2	
$f'(x)$	$\pm?$	0	$+$	0	$\pm?$
$f(x)$		0	$\nearrow$	4	

Derivatan kan inte ha teckenväxlingen $+0+0+$, ty då vore f strängt växande på hela $\mathbf{R}$ och därmed inverterbar, i strid med förutsättningarna. Inte heller $+0+0-$ fungerar, ty då vore $f(x) \leq 4$ för alla x, vilket skulle motsäga att $V_f =]-1, \infty[$. Av samma skäl går inte $-0+0+$, ty då vore $f(x) \geq 0$ för alla x. Alltså återstår bara följande möjlighet:

x			-2		2		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(går mot $+\infty$)	$\searrow$	lok. min. $f=0$	$\nearrow$	lok. max. $f=4$	$\searrow$	(går mot -1)

Över nu till $g(x) = \frac{x^2-x+2}{x+1} = x-2+\frac{4}{x+1}$. Från $g'(x) = 1-\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$ erhålls

x		-3		-1		1	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	lok. max. $g=-7$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min. $g=1$	$\nearrow$

Vi har att $g(x) \to \pm\infty$ då $x \to -1^{\pm}$, och även att $g(x) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$. (Mer precist, om man så vill: linjen $y = x - 2$ är en sned asymptot, ty $g(x) - (x-2) = \frac{4}{x+1} \to 0$ då $x \to \pm\infty$.) För användning nedan noterar vi också att $g(x) = 2$ för $x = 0$ och $x = 3$.

Nu har vi allt som behövs för att kunna undersöka $h(x) = f(g(x))$. Kedjeregeln ger $h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$. Enligt teckentabellen för f ovan så är faktorn $f'(g(x))$ positiv precis då $-2 < g(x) < 2$, alltså (vilket man ser från g:s graf) för $0 < x < 3$. Teckentabellen för h får alltså följande utseende:

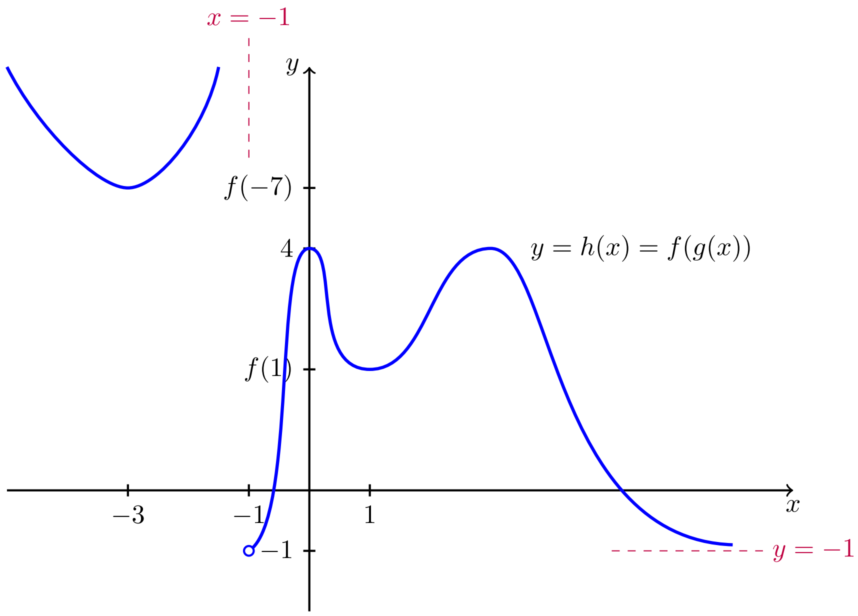
x		-3		-1		0		1		3	
$f'(g(x))$	$-$		$-$	ej def.	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	lok. min. $h=f(-7)$	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max. $h=4$	$\searrow$	lok. min. $h=f(-1)$	$\nearrow$	lok. max. $h=4$	$\searrow$

Gränsvärden beräknas med hjälp av variabelbytet $t = g(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = -1,$$
$$\lim_{x\to-1^-} h(x) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-1^+} h(x) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = -1.$$

Linjen $y = -1$ är alltså en vågrät asymptot till h:s graf, och linjen $x = -1$ är en lodrät asymptot. (Vi har för lite information om uppförandet hos $f'(t)$ då $t \to +\infty$ för att kunna säga något om $\lim_{x\to-1^+} h'(x)$.)

Därmed kan vi till slut rita grafen för h:



$x = -1$
y
$f(-7)$
4
$y = h(x) = f(g(x))$
$f(1)$
-3
-1
1
x
-1
$y = -1$