Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2010-04-29 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-1}{\ln(1+3x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+\sqrt{x})}{\ln(x+x^2)}$

2. Skissa grafen till funktionen $f(x) = e^{x^2/(2x-1)}$ (dvs. $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2x-1}\right)$). Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

3. Beräkna följande primitiva funktioner:

   (a) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int x^2 \sin\frac{x}{3}\,dx$

4. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(e^x+e^{-x})(e^x+2e^{-x})}$.

5. Formulera och bevisa produktregeln för derivator.

6. Låt $f(x) = \displaystyle\int_0^x |\sin t|\,dt$ (för $x \in \mathbf{R}$). Skissa grafen till funktionen f. De väsentliga egenskaperna bör som vanligt framgå tydligt i figuren och kommenteras.

7. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Lösningsskisser för TATA41 2011-04-29

1. (a) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+2}{x+3} \to \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2}$ då $x \to -1$.

   (b) $\frac{e^{\sin 2x}-1}{\ln(1+3x)} = \frac{2}{3}\,\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\,\frac{\sin 2x}{2x}\left(\frac{\ln(1+3x)}{3x}\right)^{-1} \to \frac{2}{3}\cdot 1 \cdot 1 \cdot 1^{-1} = \frac{2}{3}$ då $x \to 0$.

   (c) $\frac{\ln(x+\sqrt{x})}{\ln(x+x^2)} = \frac{\ln(\sqrt{x}(\sqrt{x}+1))}{\ln(x(1+x))} = \frac{\frac{1}{2}\ln x+\ln(1+\sqrt{x})}{\ln x+\ln(1+x)} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{\ln x}\ln(1+\sqrt{x})}{1+\frac{1}{\ln x}\ln(1+x)} \to \frac{\frac{1}{2}+0\cdot 0}{1+0\cdot 0} = \frac{1}{2}$ då $x \to 0^+$.

   Svar: (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$.

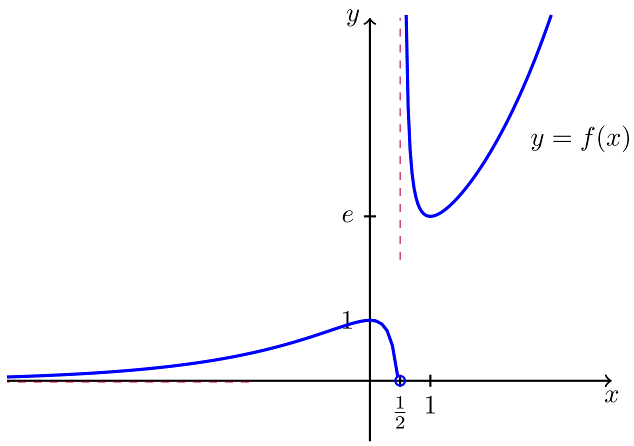
2. Funktionen $f(x) = e^{x^2/(2x-1)}$ är definierad för $x \neq \frac{1}{2}$ (och den är uppenbart positiv). Derivatan är $f'(x) = \frac{2x(2x-1)-x^2\cdot 2}{(2x-1)^2}\,e^{x^2/(2x-1)} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}\,e^{x^2/(2x-1)}$, vilket ger följande teckentabell:

x		0		$\frac{1}{2}$		1	
$2x$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$e^{x^2/(2x-1)}$	$+$		$+$	ej def.	$+$		$+$
$(2x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

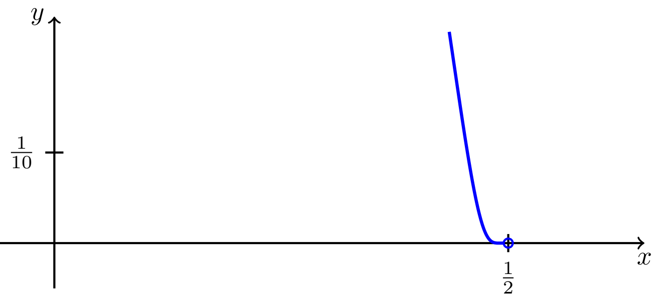
   Eftersom $\frac{x^2}{2x-1} \to +\infty$ då $x \to (\frac{1}{2})^+$ så är $\lim_{x\to(1/2)^+} f(x) = +\infty$, och linjen $x = \frac{1}{2}$ är därmed en lodrät asymptot. Observera dock att eftersom $\frac{x^2}{2x-1} \to -\infty$ då $x \to (\frac{1}{2})^-$ så är $\lim_{x\to(1/2)^-} f(x) = 0$; om man är noggrann kan man också notera att grafen närmar sig detta gränsvärde horisontellt, eftersom $\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\big(f(\frac{1}{2}+h) - 0\big) = 0$ (detta är alltså vänsterderivatan i punkten $x = \frac{1}{2}$, ifall man skulle definiera $f(\frac{1}{2}) = 0$).

   Eftersom $\frac{x^2}{2x-1} = \frac{x}{2-\frac{1}{x}} \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$, så är $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; linjen $y = 0$ är därmed en vågrät asymptot då $x \to -\infty$. Funktionen har lokalt maximum $f(0) = 1$ och lokalt minimum $f(1) = e \approx 2{,}7$.

   Sammantaget ger detta att grafen får följande utseende:



   En förstoring visar utseendet nära $x = \frac{1}{2}$ bättre:



3. (a) $\int x\sqrt{x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{2}(x^2+2)^{1/2}\,2x\,dx = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2} + C$.

   (b) Partiell integration ger $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\frac{1}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$.

   (c) Upprepade partiella integrationer ger $\int x^2 \sin\frac{x}{3}\,dx = x^2(-3\cos\frac{x}{3}) - 2x(-9\sin\frac{x}{3}) + 2(27\cos\frac{x}{3}) + C = (54-3x^2)\cos\frac{x}{3} + 18x\sin\frac{x}{3} + C$.

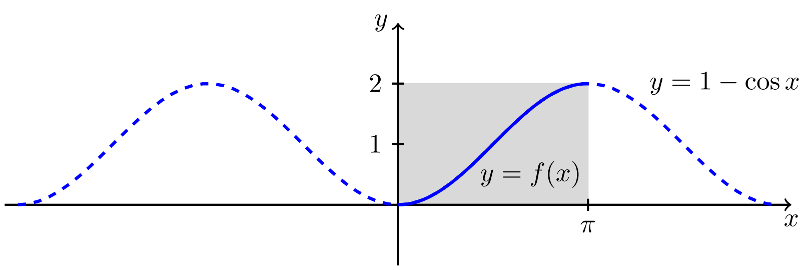
4. Variabelbytet $t = e^x$ ger

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(e^x+e^{-x})(e^x+2e^{-x})} = \int_1^\infty \frac{dt/t}{(t+t^{-1})(t+2t^{-1})}$$
$$= \int_1^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+1)(t^2+2)} = \int_1^\infty \left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+2}\right) dt$$
$$= \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+1}{t^2+2}\right]_1^\omega = \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

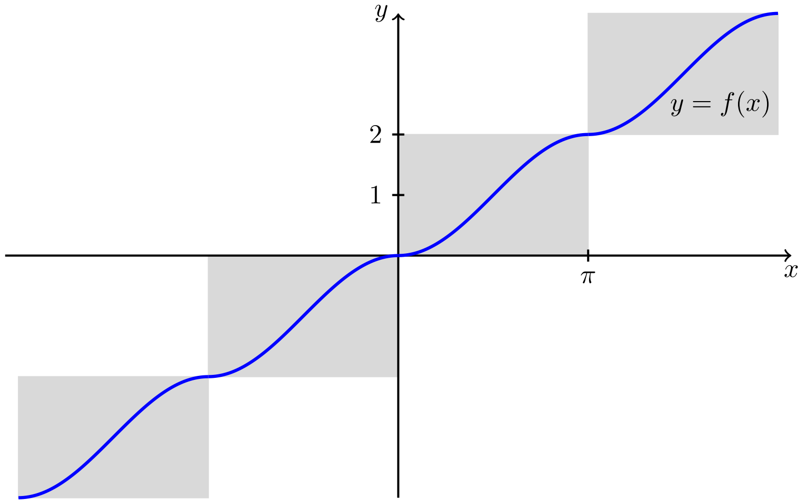
5. Se godtycklig lärobok i analys. (T.ex. Forsling & Neymark, Sats 4.2(c); beviset står på s. 199.)

6. Derivatan av $f(x) = \int_0^x |\sin t|\,dt$ är $f'(x) = |\sin x|$ enligt analysens huvudsats; alltså är $f'(x) \geq 0$ för alla x, med $f'(x) = 0$ då $x = n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$). Detta visar att f är strängt växande på hela $\mathbf{R}$, med terrasspunkter i $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$, osv.

   För $0 \leq x \leq \pi$ är $f(x) = \int_0^x |\sin t|\,dt = \int_0^x \sin t\,dt = [-\cos t]_0^x = 1 - \cos x$, en funktion vars graf vi enkelt kan rita med god noggrannhet eftersom vi vet hur kurvan $y = \cos x$ ser ut:



   Eftersom $f'(x) = |\sin x|$ är periodisk (med perioden π) måste f ha samma utseende i intervallet $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ som i intervallet $0 \leq x \leq \pi$, sånär som på en additiv integrationskonstant. Grafen för f kommer alltså att vara uppbyggd av kopior av den del av kurvan som ritades med heldragen linje i figuren ovan, och bitarna måste sitta ihop i en trappa på följande sätt eftersom f ska vara kontinuerlig:



Man ser att $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$. Asymptoter saknas.

7. Låt $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{(n!)^{1/n}}{n}$, och betrakta

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\ln(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n) - \ln n = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \ln k - \ln n.$$

Sedvanlig jämförelse med arean under grafen $y = \ln x$ (rita figur) ger

$$\int_1^n \ln x\,dx \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq \int_2^n \ln x\,dx + \ln n,$$

dvs (eftersom $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$)

$$(n\ln n - n) - (1\ln 1 - 1) \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq (n\ln n - n) - (2\ln 2 - 2) + \ln n.$$

Dividera med n och subtrahera $\ln n$, så återstår

$$-1 + \frac{1}{n} \leq \ln a_n \leq -1 + \frac{2 - 2\ln 2 + \ln n}{n}.$$

Ytterleden går mot -1 då $n \to \infty$, så detsamma gäller för $\ln a_n$, enligt *le théorème des gendarmes*, som instängningsregeln kallas i Frankrike. Slutsats: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \exp(\ln a_n) = \exp(\lim_{n\to\infty} \ln a_n) = \exp(-1) = e^{-1}$ (eftersom exp är en kontinuerlig funktion).

Svar: $1/e$.