Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2011–03–15 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Undersök
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(2e^{3x}+5e^{7x})}{x}$

2. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2-4}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

3. Bestäm en primitiv funktion till
   (a) $\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}$ (b) $\ln(x^3)$ (c) $(\arcsin x)^2$

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\, dx$.

5. (a) Definiera vad som menas med att f är deriverbar i punkten a. (1p)
   (b) Beräkna om möjligt $f'(0)$ och $f''(0)$ då (2p)

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

6. Genom vilka punkter på y-axeln går någon tangentlinje till kurvan $y = xe^{-x}$, $x > 0$?

7. Låt $f(a)$ beteckna det minsta reella nollstället till polynomet $x^3 - ax - 2$ (för $a \in \mathbf{R}$). Rita f:s graf.

Lösningsskisser för TATA41 2011-03-15

1. (a) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1} \to \frac{1+3}{1+1} = 2$ då $x \to 1$.

   (b) $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} = \frac{(1+x)-(1-x)}{\sin x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \to 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1$ då $x \to 0$.

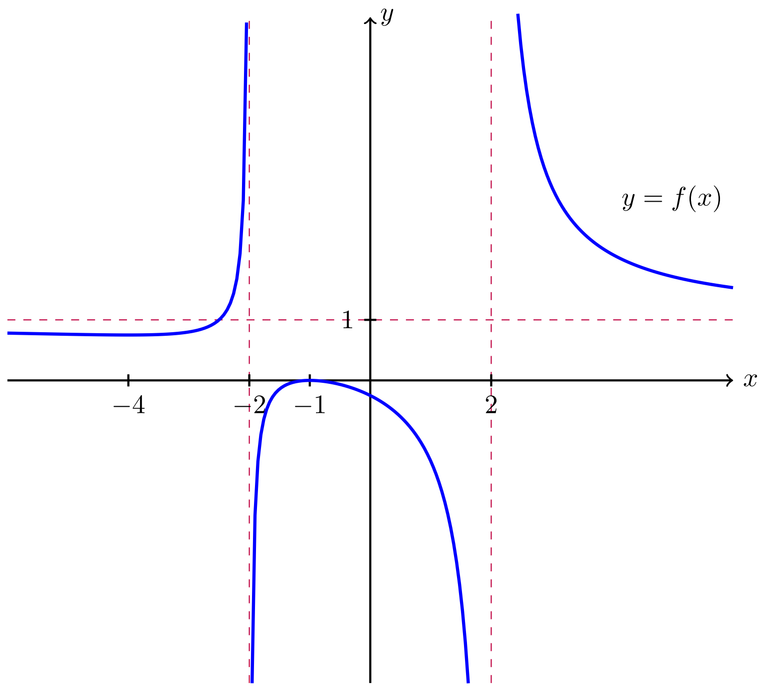
   (c) $\frac{\ln(2e^{3x}+5e^{7x})}{x} = \frac{\ln(e^{3x}(2+5e^{4x}))}{x} = \frac{\ln e^{3x}+\ln(2+5e^{4x})}{x} = 3 + \frac{1}{x}\ln(2+5e^{4x}) \to$ $3 + 0 \cdot \ln 2 = 3$ då $x \to -\infty$.

   Svar: (a) 2 (b) 1 (c) 3.

2. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-4}$ ger $f'(x) = \frac{2(x+1)\cdot(x^2-4)-(x+1)^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2(x+1)(x^2-4-x(x+1))}{(x^2-4)^2} = \frac{-2(x+1)(x+4)}{(x^2-4)^2}$. Teckentabell:

x		-4		-2		-1		2	
-2	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$(x^2-4)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$-$	ej def.	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$

Linjen $y = 1$ är vågrät asymptot, eftersom $f(x) \to 1$ då $x \to \pm\infty$. Linjerna $x = \pm 2$ är lodräta asymptoter, eftersom $f(x) \to \mp\infty$ då $x \to -2^{\pm}$ och $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 2^{\pm}$. Funktionen har lokalt minimum $f(-4) = \frac{3}{4}$ och lokalt maximum $f(-1) = 0$.



3. (a) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-3x+2} = \int \left(1 + \frac{4}{x-2} + \frac{-1}{x-1}\right) dx = x + 4\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$.

   (b) $\int \ln(x^3)\,dx = 3\int \ln x\,dx = 3(x\ln x - x) + C$.

   (c) $\int (\arcsin x)^2 dx = \begin{bmatrix} x = \sin t, \quad |t| \le \pi/2 \\ dx = \cos t\,dt \end{bmatrix} = \int t^2 \cos t\,dt = t^2 \sin t +$ $2t\cos t - 2\sin t + C = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x - 2x + C$.

4. Partiell integration ger till att börja med $\int \frac{\arctan x}{x^3}\,dx = \frac{-\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$.
Ett smidigt sätt att partialbråksuppdela här är att tillfälligt sätta $z = x^2$, så att man kan använda handpåläggning:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{z(1+z)} = \frac{1}{z} + \frac{-1}{1+z} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\int_1^\omega \frac{\arctan x}{x^3}\,dx &= \left[\ \frac{-\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x} - \arctan x\right)\ \right]_1^\omega \\ &= -\frac{1}{2}\left[\ \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x + \frac{1}{x}\ \right]_1^\omega \\ &= \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{\pi}{4} + 1 - \underbrace{\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)}_{\to 1}\underbrace{\arctan\omega}_{\to\pi/2} - \underbrace{\frac{1}{\omega}}_{\to 0}\right) \to \frac{1}{2}, \quad \omega\to\infty.\end{aligned}$$

Svar: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$.

5. (a) Funktionen f ska vara definierad i ett öppet intervall omkring punkten a, och gränsvärdet $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ska existera.

   (b) $\displaystyle\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(h+h^2\sin\frac{1}{h})-0}{h} = 1 + h\sin\frac{1}{h} \to 1+0$ då $h\to 0$ ("nollgående gånger begränsad är nollgående"), så $f'(0)=1$ enligt definitionen av derivata. För att undersöka $f''(0)$ behöver vi även känna till $f'(x)$ för $x\neq 0$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x + x^2\sin\frac{1}{x}\right) = 1 + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, \qquad x\neq 0.$$

   Detta uttryck saknar gränsvärde då $x\to 0$, så funktionen f' är inte ens kontinuerlig i punkten $x=0$, och då kan den inte heller vara deriverbar där.
   Svar: $f'(0)=1$, men $f''(0)$ existerar inte.

6. Låt $f(x) = xe^{-x}$ och betrakta en punkt $(a, f(a))$ (med $a>0$) på den givna kurvan $y=f(x)$, $x>0$. Tangentlinjen till kurvan i den punkten har ekvationen $y - f(a) = k\cdot(x-a)$, där $k = f'(a) = (1-a)e^{-a}$; alltså

$$y(x) = ae^{-a} + (1-a)e^{-a}(x-a).$$

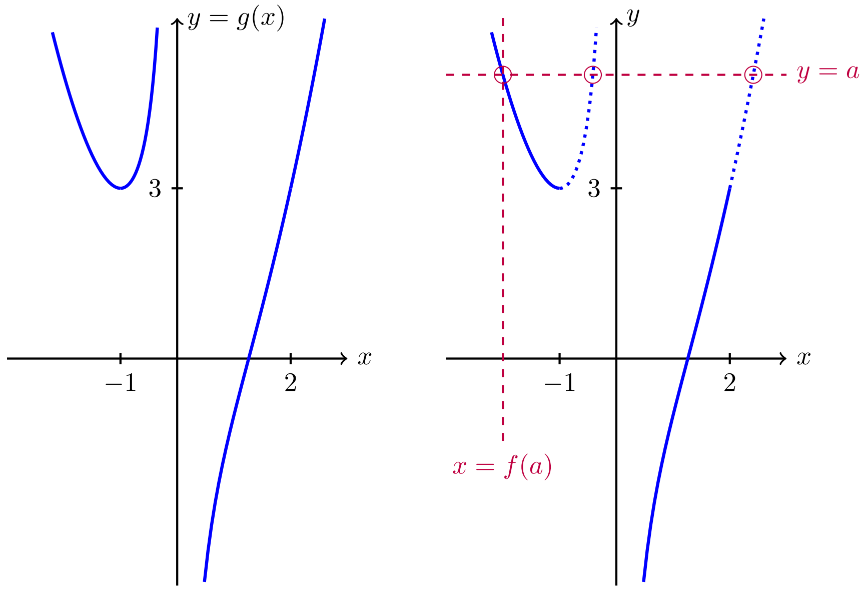
Insättning av $x=0$ ger det y-värde där tangentlinjen skär y-axeln:

$$y(0) = ae^{-a} + (1-a)e^{-a}(-a) = a^2e^{-a}.$$

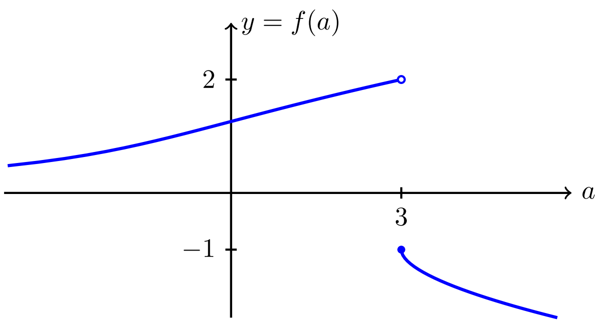
Frågan är alltså vilka värden detta uttryck kan anta när a genomlöper de positiva talen. Sätt $g(a) = a^2e^{-a}$ (för $a>0$) och gör en funktionsundersökning: $g'(a) = a(2-a)e^{-a}$, vilket är positivt för $0<a<2$ och negativt för $a>2$. Vi ser att $g(a)\to 0$ både då $a\to 0^+$ och då $a\to+\infty$, så funktionens lokala maximum $g(2)=4e^{-2}$ är ett globalt maximum, och värdemängden för g är $V_g =]0, 4e^{-2}]$.

Svar: De punkter $(0,y)$ där $0 < y \leq 4e^{-2}$.

7. Ekvationen $x^3 - ax - 2 = 0$ är ekvivalent med $g(x) = a$, där $g(x) = x^2 - \dfrac{2}{x}$. En rutinmässig funktionsundersökning visar att grafen för g har det utseende som den vänstra figuren illustrerar: en lodrät asymptot för $x = 0$, och lokalt minimum $g(-1) = 3$. (Man kan notera att $g(x) \approx -2/x$ för x nära noll, samt $g(x) \approx x^2$ när $|x|$ är stort.)



Den högra figuren illustrerar att de reella lösningarna till $g(x) = a$ ges av skärningarna mellan grafen $y = g(x)$ och den horisontella linjen $y = a$, och de delar av grafen som är ritade med heldragen linje är de som motsvarar den *minsta* lösningen $x = f(a)$ (dvs. den längst till vänster på tallinjen). Genom att radera de prickade delarna av kurvan och sedan låta x och y byta roller, så att man får a på x-axeln och $f(a)$ på y-axeln, erhålls den sökta grafen för f:



Funktionen f är strängt växande på $]-\infty, 3[$, strängt avtagande på $[3, +\infty[$, och har en språngdiskontinuitet i punkten $a = 3$ (med $\lim_{a\to 3^-} f(a) = 2$ och $f(3) = \lim_{a\to 3^+} f(a) = -1$). Den antar inget största eller minsta värde. Gränsvärden: $\lim\limits_{a\to-\infty} f(a) = 0$ resp. $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a) = -\infty$ (ty från observationerna om kurvan $y = g(x)$ ovan följer att $f(a) \approx -2/a$ för stora negativa a resp. $f(a) \approx -\sqrt{a}$ för stora positiva a).