Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2011-01-15 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \ln(x+1) - 2\arctan(2x) - 2$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{5x-1}{x^2-4x+3}$ (b) $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) e^{1/x}$ (c) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x+x^2}$.

3. Undersök gränsvärdena

   (a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-x}\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{\ln x}$.

4. Hur många olika lösningar har ekvationen $\dfrac{x^2+2x-1}{e^{2x}} = k$ för olika värden på k?

5. En axelparallell rektangel har ett hörn i origo, ett hörn på ellipsen $x^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$, med $x > 0$ och $y > 0$ och de båda övriga hörnen på koordinataxlarna. Vilka värden kan rektangelns area anta?

6. Låt $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$ för alla heltal $n \geq 2$. Visa att talföljden $a_2, a_3, a_4, \ldots$ är monoton och begränsad.

7. Visa att det finns exakt ett tal a sådant att $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{ax}{1+x^2}\right) dx$ är konvergent. Beräkna integralens värde för detta a.

Envariabelanalys 1, TATA41, 2011-01-15, lösningsförslag

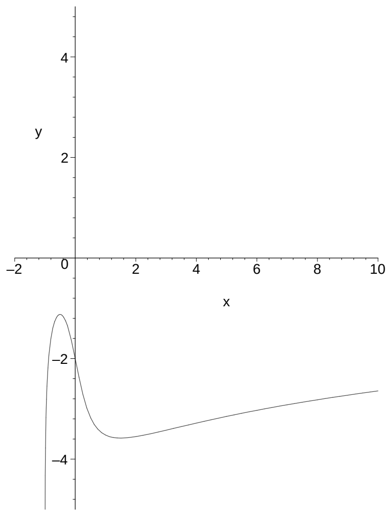
1. $f(x) = \ln(x+1) - 2\arctan(2x) - 2$ är definierad då $x > -1$. $f(x) \to -\infty$ då $x \to -1+$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$. Således är $x = -1$ en lodrät asymptot medan vågräta aymptoter saknas.

   Vidare gäller att $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{4}{1+(2x)^2} = \dfrac{4x^2+1-4x-4}{(x+1)(1+4x^2)} = \dfrac{4(x^2-x-\frac{3}{4})}{(x+1)(1+4x^2)} = \dfrac{4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})}{(x+1)(1+4x^2)} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ eller $x = \dfrac{3}{2}$.

   Teckenschemat

x	-1		$-1/2$		$3/2$	
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nexists$	$\nearrow$	$f(-1/2)$	$\searrow$	$f(3/2)$	$\nearrow$

   visar att $f(-1/2) = \ln\dfrac{1}{2} - 2\arctan(-1) - 2 = -\ln 2 + \dfrac{\pi}{2} - 2 < 0$ är ett lokalt max medan $f(3/2)$ är ett lokalt min.



   Svar: Lodrät asymptot $x = -1$. Lokalt max för $x = -1/2$ och lokalt min för $x = 3/2$.

2. (a) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-4x+3}\,dx = /\frac{5x-1}{x^2-4x+3} = \frac{5x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{7}{x-3}/ = -2\int \frac{1}{x-1}\,dx + 7\int \frac{1}{x-3}\,dx = -2\ln|x-1| + 7\ln|x-3| + C.$

   Svar: Exempelvis $7\ln|x-3| - 2\ln|x-1|$.

   (b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}}\,dx = /t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2}/ = \int (t^2 - t^3)e^t\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt = \int te^t\,dt - \int e^t\,dt = /\mathrm{PI}/ = te^t - \int e^t\,dt - \int e^t\,dt = te^t - 2e^t + C = \frac{e^{1/x}}{x} - 2e^{1/x} + C.$

   Svar: Exempelvis $\dfrac{e^{1/x}}{x} - 2e^{1/x}$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0,\ dx = 2tdt/ = \int \frac{1+t}{t^2+t^4}2t\,dt = \int \frac{2(1+t)}{t(1+t^2)}\,dt = /\frac{2(1+t)}{t(1+t^2)} = \frac{2}{t} + \frac{-2t+2}{1+t^2}/ = 2\int \frac{dt}{t} - \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt + 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\ln t - \ln(1+t^2) + 2\arctan t + C = 2\ln\sqrt{x} - \ln(1+x) + 2\arctan\sqrt{x} + C.$

   Svar: Exempelvis $\ln\dfrac{x}{1+x} + 2\arctan\sqrt{x}$.

3. (a) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x+3}{x-1} \to \frac{-2+3}{-2-1} = -\frac{1}{3} \text{ då } x \to -2.$$

Svar: Gränsvärdet är $-1/3$.

(b) Gränsvärde av typ $\infty - \infty$.

$$\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-x} = \frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-x}} = /x > 0/ = \frac{x^2+3x-(x^2-x)}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}})} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \to \frac{4}{1+1} = 2 \text{ då } x \to \infty.$$

Svar: Gränsvärdet är 2.

(c) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

$$\frac{e^x-e}{\ln x} = /t = x-1 \Leftrightarrow x = 1+t,\ x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0/ = \frac{e^{1+t}-e}{\ln(1+t)} = e\frac{e^t-1}{\ln(1+t)} = e \cdot \frac{e^t-1}{t} \cdot \frac{t}{\ln(1+t)} \to e \cdot 1 \cdot 1 = e \text{ då } t \to 0 \text{ enligt standardgränsvärden.}$$

Svar: Gränsvärdet är e.

4. Sätt $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{e^{2x}} = (x^2+2x-1)e^{-2x}$. f är definierad för alla x, $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ enligt ett standardgränsvärde medan $f(x) = x^2(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2})e^{-2x} \to \infty \cdot 1 \cdot \infty = \infty$ då $x \to -\infty$.

$f'(x) = (2x+2-2(x^2+2x-1))e^{-2x} = -2(x^2+x-2)e^{-2x} =$
$-2(x+2)(x-1)e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow x = -2$ eller $x = 1$.

Teckenschemat

x		-2		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$

visar att $f(-2) = -e^4$ är ett lokalt min medan $f(1) = 2e^{-2}$ är ett lokalt max. Grafen ger oss följande
Svar: Ekvationen saknar lösning då $k < -e^4$, har en lösning då $k = -e^4$ eller $k > 2e^{-2}$, 2 lösningar då $-e^4 < k \leq 0$ eller $k = 2e^{-2}$ samt 3 lösningar då $0 < k < 2e^{-2}$.

5. Om $(x, 0)$ är hörnet på x-axeln så är de övriga hörnen (frånsett origo) $(0, 2\sqrt{1-x^2})$ och $(x, 2\sqrt{1-x^2})$ ty $x^2 + (\dfrac{y}{2})^2 = 1$ och $y > 0$ ger att $y = 2\sqrt{1-x^2}$.

Rektangelarean är $A(x) = x \cdot 2\sqrt{1-x^2}$ med $0 < x < 1$ eftersom $x > 0$ och $y = 2\sqrt{1-x^2} > 0$. $A'(x) = 2\sqrt{1-x^2} - 2x\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{4(x+\frac{1}{\sqrt{2}})(x-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ då $0 < x < 1$. En enkel teckenundersökning visar att $A(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 1$ är rektangelareans största möjliga värde. Eftersom $A(x) \to 0$ då $x \to 0+$ eller $x \to 1-$ fås att värdemängden är $]0, 1]$.

Svar: $]0, 1]$

6. Om $n \geq 2$ gäller att $a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - (\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n) = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) > 0$ ty $\ln s < s - 1$ för $s > 0$ och $s \neq 1$ så $\ln(1 + \frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$. Således gäller att $a_{n+1} > a_n$ för $n \geq 2$ och därmed att talföljden är strängt växande, speciellt monoton.

   Eftersom funktionen $\frac{1}{t}$ är positiv och strängt avtagande för $t > 0$ visar en enkel jämförelse mellan summa och integral att $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n < 1 + \int_1^{n-1} \frac{dt}{t} - \ln n = 1 + \ln(n-1) - \ln 1 - \ln n < 1$ ty ln är en strängt växande funktion. Således är talföljden uppåt begränsad av 1 och då den är strängt växande är den nedåt begränsad av $a_2 = 1 - \ln 2$.

   Vi har således visat att talföljden är monoton och begränsad.

7. Notera först att $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$ om $x > 0$. (En rätvinklig triangel med kateterna 1 och x visar detta).
   $\int_\epsilon^r (\arctan \frac{1}{x} - \frac{ax}{1+x^2})\, dx =$ /PI, $D \arctan \frac{1}{x} = -\frac{1}{1+x^2}$/ $= [x \arctan \frac{1}{x}]_\epsilon^r + \int_\epsilon^r (\frac{x}{1+x^2} - \frac{ax}{1+x^2})\, dx = r \arctan \frac{1}{r} - \epsilon \arctan \frac{1}{\epsilon} + \frac{1-a}{2}[\ln(1+x^2)]_\epsilon^r = \frac{\arctan \frac{1}{r}}{\frac{1}{r}} - \epsilon \arctan \frac{1}{\epsilon} + \frac{1-a}{2}(\ln(1+r^2) - \ln(1+\epsilon^2)) \rightarrow$ /$a = 1$ är nödvändigt för gränsvärde/ $\rightarrow 1 - 0 = 1$ då $r \rightarrow \infty$ och $\epsilon \rightarrow 0+$ enligt standardgränsvärde och det faktum att arctan är en begränsad funktion. Svar: $a = 1$ ger värdet 1.