Envariabelanalys 1, TATA41, 2009-08-25, lösningsförslag

1. (a) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

$$\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2} \to -2 \text{ då } x \to -1.$$

Svar: Gränsvärdet är -2.

(b) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

$$\frac{e^{3x}-1}{\tan 2x} = \frac{(e^{3x}-1)\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{e^{3x}-1}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 2x \to 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 0 = 3/2 \text{ då}$$

$x \to 0$ enligt standardgränsvärden.

Svar: Gränsvärdet är $3/2$.

(c) $(x+x^2)^{1/\ln x} = e^{\frac{\ln(x+x^2)}{\ln x}} = e^{\frac{\ln x + \ln(1+x)}{\ln x}} = e^{(1+\frac{\ln(1+x)}{\ln x})} \to e^{1+0} = e$ då $x \to 0+$ ty $\ln 1 = 0$ och $\ln x \to -\infty$ då $x \to 0+$.

Svar: Gränsvärdet är e.

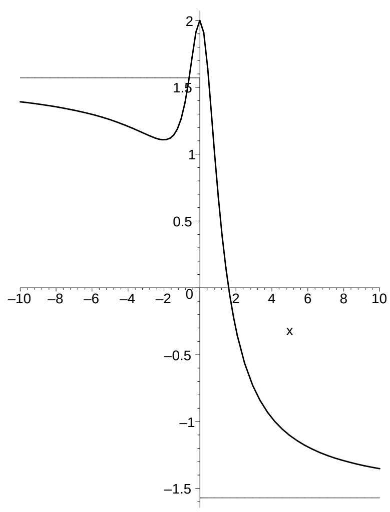
2. $$f'(x) = \frac{x^2+1-(x+2)2x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1} = -\frac{2(x+2)x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ eller } x = 0$$

Teckenschemat

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$

visar att $f(-2) = \arctan 2$ är ett lokalt min medan $f(0) = 2$ är ett lokalt max.

Vidare gäller att $f(x) \to \pm\frac{\pi}{2}$ då $x \to \mp\infty$ ty $\frac{x+2}{x^2+1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+2/x}{1+1/x^2} \to 0 \cdot 1 = 0$ då $x \to \mp\infty$. Eftersom $f(0) = 2 > \frac{\pi}{2}$ är 2 funktionens största värde medan minsta värde saknas ty $f(-2) = \arctan 2 > -\frac{\pi}{2}$.



Svar: Största värdet är 2. Minsta värde saknas.

3. (a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx = /t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2,\ t\geq 0,\ dx=2tdt/ = 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$
$= 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C.$ Svar: Exempelvis $2\arctan\sqrt{x}$.

(b) $\displaystyle\int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\ dx = \int \sin x\ dx + \int \cos^2 x(-\sin x)\ dx =$
$\displaystyle= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$ Svar: Exempelvis $\displaystyle -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$.

(c) $\displaystyle\int x\ln\sqrt{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int x\ln(1+x^2)\ dx =$ /partiell integration/=
$\displaystyle= \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2}\ dx) = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int (x - \frac{x}{1+x^2})\ dx) =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)) + C.$
Svar: Exempelvis $\displaystyle\frac{x^2+1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{4}$.

4. $\displaystyle\int_1^b \frac{\arctan\frac{1}{x}}{x^2}\ dx = /t=\frac{1}{x},\ dt=-\frac{dx}{x^2}/ = -\int_1^{1/b}\arctan t\ dt = \int_{1/b}^1 \arctan t\ dt =$
$\displaystyle=$/ partiell integration /$\displaystyle= [t\arctan t]_{1/b}^1 - \int_{1/b}^1 \frac{t}{1+t^2}\ dt =$
$\displaystyle= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan\frac{1}{b}}{b} - \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_{1/b}^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan\frac{1}{b}}{b} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{b^2}) \to \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$
då $b\to\infty$. Svar: Värdet är $\displaystyle\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

5. (a) Se boken.

(b) $\displaystyle f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} = 2\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \to 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 1$ då $x\to 0$
enligt ett standardgränsvärde. Väljs $A=1$ blir f kontinuerlig för $x=0$.

(c) $e^{x+h} = e^x\cdot e^h \to e^x$ då $h\to 0$ ty $e^h \to e^0 = 1$ då $h\to 0$ enligt förutsättningen. Definitionen medför således att e^x är kontinuerlig för alla x.

6. $f'(x) = e^{ax}(a\arctan x + \dfrac{1}{1+x^2})$ och $a\arctan x + \dfrac{1}{1+x^2} \to \pm\dfrac{a\pi}{2}$ då $x \to \pm\infty$. Då exponentialfunktionen alltid är > 0 följer att derivatan växlar tecken och funktionen därmed har minst en extrempunkt. Det återstår att visa att derivatan har högst ett nollställe eller ekvivalent att $g(x) = a\arctan x + \dfrac{1}{1+x^2}$ har högst ett nollställe. Notera att $\dfrac{1}{1+x^2}$ är strängt växande på $]-\infty, 0]$ och strängt avtagande på $[0,\infty[$ och att $\arctan x \geq 0$ precis då $x \geq 0$.

   För $a > 0$ är $g(x)$ strängt växande på $]-\infty, 0]$, ty $a\arctan x$ är strängt växande om $a > 0$, och $g(x)$ är positiv på $[0,\infty[$. Således kan $g(x)$ ha högst ett nollställe om $a > 0$.

   För $a < 0$ är $g(x)$ strängt avtagande på $[0,\infty[$, ty $a\arctan x$ är strängt avtagande om $a < 0$, och $g(x)$ är positiv på $]-\infty, 0]$. Således kan $g(x)$ ha högst ett nollställe även om $a < 0$.

   Sammantaget har vi visat att f har exakt en extrempunkt.

7. Observera först att $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} = \dfrac{1}{n\ln n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln k$.

   $\ln x$ är strängt växande och positiv för $x \geq 1$. En lämplig figur visar att

   $$\int_1^n \ln x\; dx \leq \sum_{k=1}^{n}\ln k \leq \int_1^n \ln x\; dx + \ln n \text{ ty } \ln 1 = 0.$$

   Då $\displaystyle\int_1^n \ln x\; dx$ = /partiell integration/ $= [x\ln x - x]_1^n = n\ln n - n + 1$ fås olikheten $n\ln n - n + 1 \leq \ln n! \leq n\ln n - n + 1 + \ln n$. Eftersom $\dfrac{n\ln n - n + 1}{n\ln n} = 1 - \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{1}{n\ln n} \to 1$ då $n \to \infty$ och $\dfrac{n\ln n - n + 1 + \ln n}{n\ln n} \to 1$ då $n \to \infty$ följer av instängningsregeln att $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n\ln n} = 1$.

   Svar: Gränsvärdet är 1.