Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2009–08-25 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\tan 2x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(x+x^2\right)^{1/\ln x}$.

2. Bestäm största och minsta värde, om dessa existerar, till $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1} - \arctan x$.

3. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x}$ (b) $\sin^3 x$ (c) $x \ln \sqrt{1+x^2}$.

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$.

5. (a) Funktionen f är definierad för alla x. Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i punkten $x = a$.

   (b) Funktionen f är definierad för $-1 \le x \le 1$ och

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} & , \text{ då } x \neq 0 \\ A & , \text{ då } x = 0. \end{cases}$$

   Går det att välja A så att f blir kontinuerlig i punkten $x = 0$?

   (c) Funktionen $f(x) = e^x$ är kontinuerlig i $x = 0$. Visa, utgående från detta, att f är kontinuerlig för alla x.

6. Visa att för varje $a \neq 0$ har $f(x) = e^{ax} \arctan x$ exakt en extrempunkt.

7. Undersök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n}$.