Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2009–08-25 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\tan 2x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(x+x^2\right)^{1/\ln x}$.

2. Bestäm största och minsta värde, om dessa existerar, till $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1} - \arctan x$.

3. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x}$ (b) $\sin^3 x$ (c) $x \ln \sqrt{1+x^2}$.

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx$.

5. (a) Funktionen f är definierad för alla x. Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i punkten $x = a$.

   (b) Funktionen f är definierad för $-1 \leq x \leq 1$ och

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} & , \text{ då } x \neq 0 \\ A & , \text{ då } x = 0. \end{cases}$$

   Går det att välja A så att f blir kontinuerlig i punkten $x = 0$?

   (c) Funktionen $f(x) = e^x$ är kontinuerlig i $x = 0$. Visa, utgående från detta, att f är kontinuerlig för alla x.

6. Visa att för varje $a \neq 0$ har $f(x) = e^{ax} \arctan x$ exakt en extrempunkt.

7. Undersök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n}$.

Envariabelanalys 1, TATA41, 2009-08-25, lösningsförslag

1. (a) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

$$\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2} \to -2 \text{ då } x \to -1.$$

Svar: Gränsvärdet är -2.

(b) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

$$\frac{e^{3x}-1}{\tan 2x} = \frac{(e^{3x}-1)\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{e^{3x}-1}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 2x \to 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 0 = 3/2 \text{ då}$$

$x \to 0$ enligt standardgränsvärden. Svar: Gränsvärdet är $3/2$.

(c) $(x+x^2)^{1/\ln x} = e^{\frac{\ln(x+x^2)}{\ln x}} = e^{\frac{\ln x + \ln(1+x)}{\ln x}} = e^{(1+\frac{\ln(1+x)}{\ln x})} \to e^{1+0} = e$ då $x \to 0+$ ty $\ln 1 = 0$ och $\ln x \to -\infty$ då $x \to 0+$. Svar: Gränsvärdet är e.

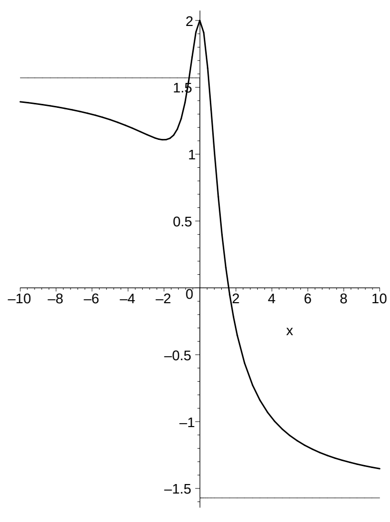
2. $$f'(x) = \frac{x^2+1-(x+2)2x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1} = -\frac{2(x+2)x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ eller } x = 0$$

Teckenschemat

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$

visar att $f(-2) = \arctan 2$ är ett lokalt min medan $f(0) = 2$ är ett lokalt max.

Vidare gäller att $f(x) \to \pm\frac{\pi}{2}$ då $x \to \mp\infty$ ty $\frac{x+2}{x^2+1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+2/x}{1+1/x^2} \to 0 \cdot 1 = 0$ då $x \to \mp\infty$. Eftersom $f(0) = 2 > \frac{\pi}{2}$ är 2 funktionens största värde medan minsta värde saknas ty $f(-2) = \arctan 2 > -\frac{\pi}{2}$.



Svar: Största värdet är 2. Minsta värde saknas.

3. (a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0,\ dx = 2tdt/ = 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$
$= 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C.$ Svar: Exempelvis $2\arctan\sqrt{x}$.

(b) $\displaystyle\int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\ dx = \int \sin x\ dx + \int \cos^2 x(-\sin x)\ dx =$
$\displaystyle= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$ Svar: Exempelvis $\displaystyle -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$.

(c) $\displaystyle\int x\ln\sqrt{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int x\ln(1+x^2)\ dx =$ /partiell integration/=
$\displaystyle= \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2}\ dx) = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int (x - \frac{x}{1+x^2})\ dx) =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)) + C.$

Svar: Exempelvis $\displaystyle\frac{x^2+1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{4}$.

4. $\displaystyle\int_1^b \frac{\arctan\frac{1}{x}}{x^2}\ dx = /t = \frac{1}{x},\ dt = -\frac{dx}{x^2}/ = -\int_1^{1/b} \arctan t\ dt = \int_{1/b}^1 \arctan t\ dt =$
$\displaystyle=/$ partiell integration $\displaystyle/ = [t\arctan t]_{1/b}^1 - \int_{1/b}^1 \frac{t}{1+t^2}\ dt =$
$\displaystyle= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan\frac{1}{b}}{b} - \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_{1/b}^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan\frac{1}{b}}{b} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{b^2}) \to \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$
då $b \to \infty$. Svar: Värdet är $\displaystyle\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

5. (a) Se boken.

(b) $\displaystyle f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} = 2\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \to 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 1$ då $x \to 0$ enligt ett standardgränsvärde. Väljs $A = 1$ blir f kontinuerlig för $x = 0$.

(c) $e^{x+h} = e^x \cdot e^h \to e^x$ då $h \to 0$ ty $e^h \to e^0 = 1$ då $h \to 0$ enligt förutsättningen. Definitionen medför således att e^x är kontinuerlig för alla x.

6. $f'(x) = e^{ax}(a\arctan x + \dfrac{1}{1+x^2})$ och $a\arctan x + \dfrac{1}{1+x^2} \to \pm\dfrac{a\pi}{2}$ då $x \to \pm\infty$. Då exponentialfunktionen alltid är > 0 följer att derivatan växlar tecken och funktionen därmed har minst en extrempunkt. Det återstår att visa att derivatan har högst ett nollställe eller ekvivalent att $g(x) = a\arctan x + \dfrac{1}{1+x^2}$ har högst ett nollställe. Notera att $\dfrac{1}{1+x^2}$ är strängt växande på $]-\infty, 0]$ och strängt avtagande på $[0, \infty[$ och att $\arctan x \geq 0$ precis då $x \geq 0$.

   För $a > 0$ är $g(x)$ strängt växande på $]-\infty, 0]$, ty $a\arctan x$ är strängt växande om $a > 0$, och $g(x)$ är positiv på $[0, \infty[$. Således kan $g(x)$ ha högst ett nollställe om $a > 0$.

   För $a < 0$ är $g(x)$ strängt avtagande på $[0, \infty[$, ty $a\arctan x$ är strängt avtagande om $a < 0$, och $g(x)$ är positiv på $]-\infty, 0]$. Således kan $g(x)$ ha högst ett nollställe även om $a < 0$.

   Sammantaget har vi visat att f har exakt en extrempunkt.

7. Observera först att $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} = \dfrac{1}{n\ln n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k$.

   $\ln x$ är strängt växande och positiv för $x \geq 1$. En lämplig figur visar att

   $\displaystyle\int_1^n \ln x\ dx \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \int_1^n \ln x\ dx + \ln n$ ty $\ln 1 = 0$.

   Då $\displaystyle\int_1^n \ln x\ dx$ = /partiell integration/ = $[x\ln x - x]_1^n = n\ln n - n + 1$ fås olikheten $n\ln n - n + 1 \leq \ln n! \leq n\ln n - n + 1 + \ln n$. Eftersom $\dfrac{n\ln n - n + 1}{n\ln n} = 1 - \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{1}{n\ln n} \to 1$ då $n \to \infty$ och $\dfrac{n\ln n - n + 1 + \ln n}{n\ln n} \to 1$ då $n \to \infty$ följer av instängningsregeln att $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n\ln n} = 1$.

   Svar: Gränsvärdet är 1.