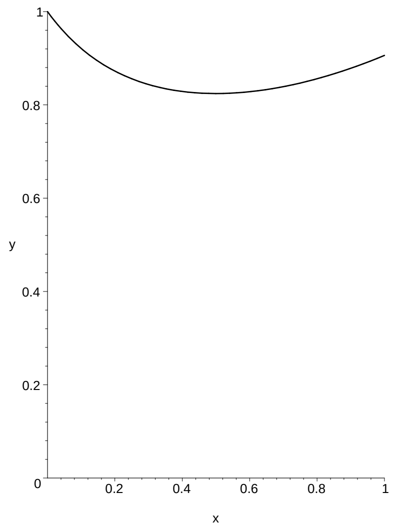
Envariabelanalys 1, TATA41, 2009-06-10, lösningsförslag

1. $f'(x) = e^x(\frac{1}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}) = \frac{2e^x(x-\frac{1}{2})}{(2x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

   Teckenschemat

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1/2)$	$\nearrow$	$f(1)$

   visar att $f(\frac{1}{2}) = \frac{e^{1/2}}{2}$ är funktionens minsta värde. Då $f(0) = 1$ och $f(1) = \frac{e}{3} < 1$ följer att 1 är funktionens största värde och satsen om mellanliggande värden ger att $V_f = [\frac{\sqrt{e}}{2}, 1]$.



Svar: $V_f = [\frac{\sqrt{e}}{2}, 1]$.

2. (a) $\int \frac{x+14}{x^2+3x-4}\,dx = \Big/ \frac{x+14}{x^2+3x-4} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+4} \Big/ =$
   $= 3\int \frac{1}{x-1}\,dx - 2\int \frac{1}{x+4}\,dx = 3\ln|x-1| - 2\ln|x+4| + C.$

   Svar: Exempelvis $3\ln|x-1| - \ln(x+4)^2$.

   (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \Big/ t = \sqrt{x},\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \Big/ = \int \frac{2}{1+t}\,dt =$
   $= 2\ln|1+t| + C = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$

   Svar: Exempelvis $2\ln(1+\sqrt{x})$.

   (c) $\int e^{2x}\sin(e^x)\,dx = \Big/ t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t, dx = \frac{dt}{t} \Big/ = \int t\sin t\,dt =$
   $= \Big/ \text{partiell integration} \Big/ = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t + C =$
   $= -e^x\cos(e^x) + \sin(e^x) + C.$

   Svar: Exempelvis $-e^x\cos(e^x) + \sin(e^x)$.

3. (a) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

   $\frac{x^3-4x}{x^2+x-6} = \frac{x(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x(x+2)}{x+3} \to \frac{8}{5}$ då $x \to 2$.

   Svar: Gränsvärdet är $8/5$.

(b) Gränsvärde av typ $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\frac{e^{2x}+2e^x+e^{\ln x^2}}{e^{3x}+3e^x+e^{\ln x^3}} = \frac{e^{2x}(1+\frac{2}{e^x}+\frac{x^2}{e^{2x}})}{e^{3x}(1+\frac{3}{e^{2x}}+\frac{x^3}{e^{3x}})} = \frac{1+\frac{2}{e^x}+(\frac{x}{e^x})^2}{e^x(1+\frac{3}{e^{2x}}+(\frac{x}{e^x})^3)} \to 0 \text{ då } x\to\infty \text{ ty}$$

$\dfrac{x}{e^x} \to 0$ då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärde. Svar: Gränsvärdet är 0.

(c) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

$$\frac{\ln\cos^2 x}{x^2} = \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{x^2} = -\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{-\sin^2 x}\cdot(\frac{\sin x}{x})^2 \to -1\cdot 1 = -1 \text{ då } x\to 0$$

enligt standardgränsvärde. Svar: Gränsvärdet är -1.

4. Sätt $f(x) = x + \dfrac{x}{x+1} - 2\ln(1+x),\ x \geq 0$. Vi skall visa att $f(x) > 0$ då $x > 0$.

Eftersom $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{x}{(1+x)^2} - \dfrac{2}{1+x} = \dfrac{x^2}{(1+x)^2} > 0$ då $x > 0$ är f strängt växande för $x \geq 0$. Av $f(0) = 0$ följer således att $f(x) > 0$ då $x > 0$.

5. $y'(x) = \dfrac{1}{x(1+x^2)} \Leftrightarrow y(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = /\text{partialbråk}/ = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$

$= \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ om $x > 0$.

Partiell integration ger att $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x + A$ och $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx =$

$= x\ln(1+x^2) - \displaystyle\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - \int (2 - \frac{2}{1+x^2})\,dx =$

$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + B$. Således gäller att

$$\int_1^R y(x)\,dx = \left[x\ln x - x - \frac{1}{2}(x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x) + Cx\right]_1^R =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x\ln\frac{1+x^2}{x^2} + 2\arctan x - 2Cx\right]_1^R = -\frac{R}{2}\ln(1+\frac{1}{R^2}) - \arctan R + CR + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} - C.$$

Eftersom $R\ln(1+\dfrac{1}{R^2}) = \dfrac{1}{R}\cdot\dfrac{\ln(1+\frac{1}{R^2})}{\frac{1}{R^2}} \to 0\cdot 1 = 0$, enligt standardgränsvärde, och $\arctan R \to \dfrac{\pi}{2}$ då $R \to \infty$, följer att $C = 0$ måste gälla. Således fås att $\displaystyle\int_1^\infty y(x)\,dx =$

$= -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

Svar: $y(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ och integralens värde är $\ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

6. (a) Se boken sid 203.

(b) f har lokalt max i $a \Leftrightarrow f(x) \leq f(a), x$ nära $a \Leftrightarrow -f(x) \geq -f(a), x$ nära $a \Leftrightarrow /f$ udda/ $\Leftrightarrow f(-x) \geq f(-a), x$ nära $a \Leftrightarrow f$ har lokalt min i $-a$ ty x nära a precis då $-x$ nära $-a$.

7. $0 \leq \left| \int_a^b f(x)\cos(tx)\ dx \right| = \Big/ \text{partiell integration} \Big/ =$

$$= \left| \left[f(x)\frac{\sin(tx)}{t} \right]_a^b - \frac{1}{t}\int_a^b f'(x)\sin(tx)\ dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{t}\left(|f(b)\sin(bt)| + |f(a)\sin(at)| + \int_a^b \left|f'(x)\sin(tx)\right|\ dx \right) \leq$$

$\leq \Big/$ eftersom f' är kontinuerlig på $[a,b]$ finns en konstant $C > 0$ sådan att $|f'(x)| \leq C$ då $x \in [a,b] \Big/ \leq$

$\leq \frac{1}{t}(|f(b)\sin(bt)| + |f(a)\sin(at)| + C|b-a|) \to 0$ då $t \to \infty$ ty parentesen är en begränsad funktion av t.

Instängningsregeln ger således att $\left| \int_a^b f(x)\cos(tx)\ dx \right| \to 0$ då $t \to \infty$ och därmed även $\int_a^b f(x)\cos(tx)\ dx \to 0$ då $t \to \infty$.