

# Tentamen i Envariabelanalys 1

2009–06-10 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg  $n$  räcker  $4(n - 1)$  poäng och  $n$  godkända uppgifter ( $n = 3, 4, 5$ ).

1. Rita grafen och ange värdemängden för funktionen  $f(x) = \frac{e^x}{2x + 1}$  om definitionsmängden är  $[0, 1]$ .

2. Bestäm en primitiv funktion till

(a)  $\frac{x + 14}{x^2 + 3x - 4}$                       (b)  $\frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}$                       (c)  $e^{2x} \sin(e^x)$ .

3. Undersök gränsvärdena

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6}$                       (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 2e^x + e^{\ln(x^2)}}{e^{3x} + 3e^x + e^{\ln(x^3)}}$                       (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos^2 x)}{x^2}$ .

4. Visa att  $2 \ln(1 + x) < x + \frac{x}{1 + x}$  för alla  $x > 0$ .

5. Finns det någon funktion  $y$  som uppfyller att  $y'(x) = \frac{1}{x(1 + x^2)}$ ,  $x > 0$  och att

$\int_1^{\infty} y(x) dx$  är konvergent? Bestäm i så fall integralens värde.

6. Funktionen  $f$  är definierad för alla reella tal.

(a) Ange definitionen av att  $f$  har ett lokalt maximum i punkten  $x = a$ . (1p)

(b) Som bekant är  $f$  udda om  $f(-x) = -f(x)$  för alla  $x \in D_f$ . Antag att  $f$  är udda och har ett lokalt maximum för  $x = a$ . Visa att  $f$  har ett lokalt minimum för  $x = -a$ . (2p)

7. Låt  $f'$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$ . Visa att  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0$ .