Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2009–06-10 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Rita grafen och ange värdemängden för funktionen $f(x) = \dfrac{e^x}{2x+1}$ om definitionsmängden är $[0, 1]$.

2. Bestäm en primitiv funktion till
   (a) $\dfrac{x+14}{x^2+3x-4}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ (c) $e^{2x}\sin(e^x)$.

3. Undersök gränsvärdena
   (a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{x^2+x-6}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}+2\,e^x+e^{\ln(x^2)}}{e^{3x}+3\,e^x+e^{\ln(x^3)}}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos^2 x)}{x^2}$.

4. Visa att $2\ln(1+x) < x + \dfrac{x}{1+x}$ för alla $x > 0$.

5. Finns det någon funktion y som uppfyller att $y'(x) = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$, $x > 0$ och att $\displaystyle\int_1^\infty y(x)\,dx$ är konvergent? Bestäm i så fall integralens värde.

6. Funktionen f är definierad för alla reella tal.
   (a) Ange definitionen av att f har ett lokalt maximum i punkten $x = a$. (1p)
   (b) Som bekant är f udda om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in D_f$. Antag att f är udda och har ett lokalt maximum för $x = a$. Visa att f har ett lokalt minimum för $x = -a$. (2p)

7. Låt f' vara kontinuerlig på $[a, b]$. Visa att $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(tx)\,dx = 0$.

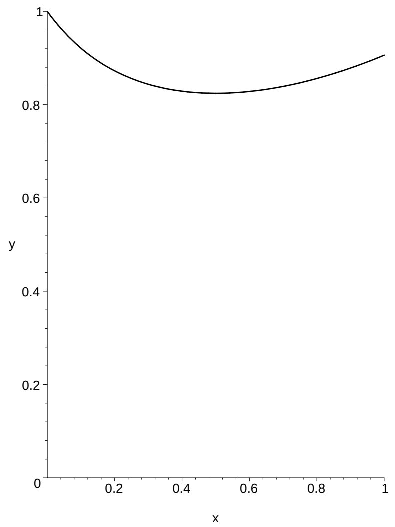
Envariabelanalys 1, TATA41, 2009-06-10, lösningsförslag

1. $f'(x) = e^x(\frac{1}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}) = \frac{2e^x(x-\frac{1}{2})}{(2x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

   Teckenschemat

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1/2)$	$\nearrow$	$f(1)$

   visar att $f(\frac{1}{2}) = \frac{e^{1/2}}{2}$ är funktionens minsta värde. Då $f(0) = 1$ och $f(1) = \frac{e}{3} < 1$ följer att 1 är funktionens största värde och satsen om mellanliggande värden ger att $V_f = [\frac{\sqrt{e}}{2}, 1]$.



Svar: $V_f = [\frac{\sqrt{e}}{2}, 1]$.

2. (a) $\int \frac{x+14}{x^2+3x-4}\,dx = \Big/ \frac{x+14}{x^2+3x-4} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+4} \Big/ =$
   $= 3\int \frac{1}{x-1}\,dx - 2\int \frac{1}{x+4}\,dx = 3\ln|x-1| - 2\ln|x+4| + C.$

   Svar: Exempelvis $3\ln|x-1| - \ln(x+4)^2$.

   (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \Big/ t = \sqrt{x},\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \Big/ = \int \frac{2}{1+t}\,dt =$
   $= 2\ln|1+t| + C = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$

   Svar: Exempelvis $2\ln(1+\sqrt{x})$.

   (c) $\int e^{2x}\sin(e^x)\,dx = \Big/ t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t, dx = \frac{dt}{t} \Big/ = \int t\sin t\,dt =$
   $= \Big/$partiell integration$\Big/ = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t + C =$
   $= -e^x\cos(e^x) + \sin(e^x) + C.$

   Svar: Exempelvis $-e^x\cos(e^x) + \sin(e^x)$.

3. (a) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.
   $\frac{x^3-4x}{x^2+x-6} = \frac{x(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x(x+2)}{x+3} \to \frac{8}{5}$ då $x \to 2$.

   Svar: Gränsvärdet är $8/5$.

(b) Gränsvärde av typ $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\frac{e^{2x}+2e^x+e^{\ln x^2}}{e^{3x}+3e^x+e^{\ln x^3}} = \frac{e^{2x}(1+\frac{2}{e^x}+\frac{x^2}{e^{2x}})}{e^{3x}(1+\frac{3}{e^{2x}}+\frac{x^3}{e^{3x}})} = \frac{1+\frac{2}{e^x}+(\frac{x}{e^x})^2}{e^x(1+\frac{3}{e^{2x}}+(\frac{x}{e^x})^3)} \to 0 \text{ då } x\to\infty \text{ ty}$$

$\dfrac{x}{e^x} \to 0$ då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärde. Svar: Gränsvärdet är 0.

(c) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

$$\frac{\ln\cos^2 x}{x^2} = \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{x^2} = -\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{-\sin^2 x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to -1\cdot 1 = -1 \text{ då } x\to 0$$

enligt standardgränsvärde. Svar: Gränsvärdet är -1.

4. Sätt $f(x) = x + \dfrac{x}{x+1} - 2\ln(1+x),\ x \geq 0$. Vi skall visa att $f(x) > 0$ då $x > 0$.

Eftersom $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{x}{(1+x)^2} - \dfrac{2}{1+x} = \dfrac{x^2}{(1+x)^2} > 0$ då $x > 0$ är f strängt växande för $x \geq 0$. Av $f(0) = 0$ följer således att $f(x) > 0$ då $x > 0$.

5. $y'(x) = \dfrac{1}{x(1+x^2)} \Leftrightarrow y(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \text{/partialbråk/} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$

$= \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ om $x > 0$.

Partiell integration ger att $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x + A$ och $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx =$

$= x\ln(1+x^2) - \displaystyle\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - \int (2 - \frac{2}{1+x^2})\,dx =$

$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + B$. Således gäller att

$$\int_1^R y(x)\,dx = \left[x\ln x - x - \frac{1}{2}(x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x) + Cx\right]_1^R =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x\ln\frac{1+x^2}{x^2} + 2\arctan x - 2Cx\right]_1^R = -\frac{R}{2}\ln(1+\frac{1}{R^2}) - \arctan R + CR + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} - C.$$

Eftersom $R\ln(1+\dfrac{1}{R^2}) = \dfrac{1}{R}\cdot\dfrac{\ln(1+\frac{1}{R^2})}{\frac{1}{R^2}} \to 0\cdot 1 = 0$, enligt standardgränsvärde, och $\arctan R \to \dfrac{\pi}{2}$ då $R \to \infty$, följer att $C = 0$ måste gälla. Således fås att $\displaystyle\int_1^\infty y(x)\,dx =$

$= -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

Svar: $y(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ och integralens värde är $\ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

6. (a) Se boken sid 203.

(b) f har lokalt max i $a \Leftrightarrow f(x) \leq f(a), x$ nära $a \Leftrightarrow -f(x) \geq -f(a), x$ nära $a \Leftrightarrow$ /f udda/ $\Leftrightarrow f(-x) \geq f(-a), x$ nära $a \Leftrightarrow f$ har lokalt min i $-a$ ty x nära a precis då $-x$ nära $-a$.

7. $0 \leq \left| \int_a^b f(x)\cos(tx)\ dx \right| = \Big/ \text{partiell integration} \Big/ =$

$= \left| \left[f(x)\dfrac{\sin(tx)}{t} \right]_a^b - \dfrac{1}{t} \int_a^b f'(x)\sin(tx)\ dx \right| \leq$

$\leq \dfrac{1}{t} \left(|f(b)\sin(bt)| + |f(a)\sin(at)| + \int_a^b \left| f'(x)\sin(tx) \right|\ dx \right) \leq$

$\leq \Big/$ eftersom f' är kontinuerlig på $[a, b]$ finns en konstant $C > 0$ sådan att $|f'(x)| \leq C$ då $x \in [a, b] \Big/ \leq$

$\leq \dfrac{1}{t}(|f(b)\sin(bt)| + |f(a)\sin(at)| + C|b - a|) \to 0$ då $t \to \infty$ ty parentesen är en begränsad funktion av t.

Instängningsregeln ger således att $\left| \int_a^b f(x)\cos(tx)\ dx \right| \to 0$ då $t \to \infty$ och därmed även $\int_a^b f(x)\cos(tx)\ dx \to 0$ då $t \to \infty$.