Envariabelanalys 1, TATA41, 2009-04-16, lösningsförslag

1. (a) $\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx = /t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = t^2-1,\ t \geq 0, dx = 2tdt/ = \int 2te^t\,dt = /\text{partiell integration}/= 2te^t - \int 2e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}} + C.$

Svar: Exempelvis $2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}}$.

(b) $\int \frac{3x}{x^2+5x+4}\,dx = /\frac{3x}{x^2+5x+4} = \frac{3x}{(x+4)(x+1)} = \frac{4}{x+4} - \frac{1}{x+1}/ = \int (\frac{4}{x+4} - \frac{1}{x+1})\,dx = 4\ln|x+4| - \ln|x+1| + C.$

Svar: Exempelvis $4\ln|x+4| - \ln|x+1|$.

(c) $\int \sin x \cos 2x\,dx = \int \sin x(2\cos^2 x - 1)\,dx = -2\int(-\sin x)\cos^2 x\,dx - \int \sin x\,dx = -\frac{2\cos^3 x}{3} + \cos x + C.$

Svar: Exempelvis $\cos x - \frac{2\cos^3 x}{3}$.

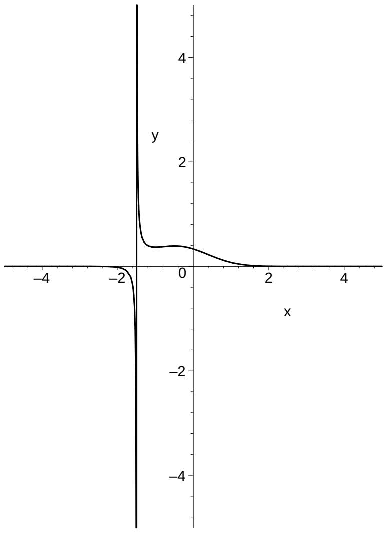
2. $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x+3} \to 0$ då $x \to \pm\infty$ och $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to -\frac{3}{2}\pm$. Således är x-axeln vågrät asymptot och linjen $x = -3/2$ lodrät asymptot.

Vidare gäller att $f'(x) = e^{-x^2}(\frac{-2x}{2x+3} - \frac{2}{(2x+3)^2}) = -e^{-x^2}\frac{2x(2x+3)+2}{(2x+3)^2} = -e^{-x^2}\frac{4(x+1)(x+1/2)}{(2x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = -1/2$.

Teckenschemat

x		$-3/2$		-1		$-1/2$	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(-1/2)$	$\searrow$

visar att f har lokalt min för $x = -1$ och lokalt max för $x = -1/2$.



3. (a) Gränsvärde av typ $\infty - \infty$.

$$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2x}{x(\sqrt{1+2/x}+1)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+2/x}+1} \to 1 \text{ då } x \to \infty.$$

Svar: Gränsvärdet är 1.

(b) Gränsvärde av typ $\infty - \infty$.

$$\ln 2x + 2\ln x - 3\ln(x+1) = \ln 2 + \ln x + 2\ln x - 3\ln(x+1) = \ln 2 + 3(\ln x - \ln(x+1)) =$$

$$= \ln 2 + 3\ln\frac{x}{x+1} = \ln 2 + 3\ln\frac{1}{1+1/x} \to \ln 2 + 3\ln 1 = \ln 2 \text{ då } x \to \infty.$$

Svar: Gränsvärdet är $\ln 2$.

(c) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

För $x > 0$ fås att $\dfrac{\sin(3x+|x|)}{x} = \dfrac{\sin(4x)}{x} = 4 \cdot \dfrac{\sin(4x)}{4x} \to 4$ då $x \to 0+$ enligt standardgränsvärde.

För $x < 0$ fås att $\dfrac{\sin(3x+|x|)}{x} = \dfrac{\sin(2x)}{x} = 2 \cdot \dfrac{\sin(2x)}{2x} \to 2$ då $x \to 0-$ enligt standardgränsvärde.

Eftersom vänstergränsvärdet och högergränsvärdet är olika saknas gränsvärde.

Svar: Gränsvärde saknas.

4. $$\int_{1/3}^{r} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0,\ dx = 2tdt/ = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{r}} \frac{2(1+t)}{t^3+t}\,dt =$$

$$= /\frac{2(1+t)}{t^3+t} = \frac{2(1+t)}{t(t^2+1)} = \frac{2}{t} - \frac{2t-2}{t^2+1}/ = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{r}} \left(\frac{2}{t} - \frac{2t}{t^2+1} + \frac{2}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= [2\ln|t| - \ln(t^2+1) + 2\arctan t]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{r}} = \ln\frac{r}{1+r} + 2\arctan\sqrt{r} - \ln\frac{1}{3} + \ln\frac{4}{3} - 2\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \ln\frac{1}{1+1/r} + 2\arctan\sqrt{r} + \ln 4 - \frac{\pi}{3} \to \frac{2\pi}{3} + \ln 4 \text{ då } r \to \infty$$

Svar: Värdet är $\dfrac{2\pi}{3} + \ln 4$.

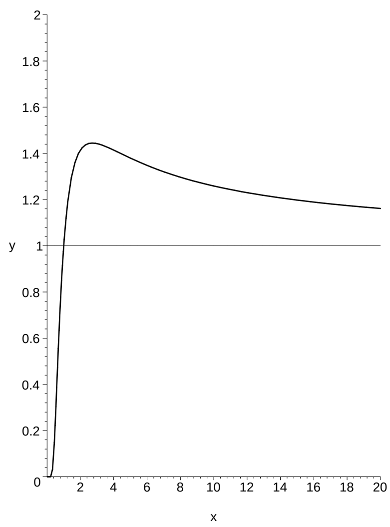
5. $f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}} \to 0$ då $x \to 0+$, ty $\dfrac{\ln x}{x} \to -\infty$ då $x \to 0+$, och $f(x) \to e^0 = 1$ då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärde.

$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ har endast nollstället $x = e$.

Teckenschemat

x	0		e	
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nexists$	$\nearrow$	$f(e)$	$\searrow$

visar att $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ är funktionens största värde. Gränsvärdena tillsammans med satsen om mellanliggande värden visar således att värdemängden är $]0, e^{\frac{1}{e}}]$.



Svar: Värdemängden är $]0, e^{\frac{1}{e}}]$.

6. (a) Se boken sid 288.

   (b) Sätt $p(x) = x^3 - 3x + 3$. Då gäller att $p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0$ endast har nollstället $x = 1$ i intervallet $[0, 3]$. En enkel teckenundersökning visar att $p(1) = 1$ är polynomets minsta värde på $[0, 3]$ medan $p(3) = 21$ är det största värdet. Således gäller att $\dfrac{7}{21} \leq \dfrac{7}{x^3 - 3x + 3} \leq 7$ på intervallet $[0, 3]$. Eftersom intervallängden är 3, är 1 en undersumma medan 21 är en översumma, varav olikheterna följer.

7. $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\arcsin \frac{t}{x}}{\sqrt{x^4 - x^2 t^2}}\, dt = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} \frac{\arcsin \frac{t}{x}}{\sqrt{1 - (\frac{t}{x})^2}}\, dt = /s = \frac{t}{x} \Leftrightarrow t = xs,\ dt = xds/ =$

$= \displaystyle\frac{1}{x} \int_0^{x} \frac{\arcsin s}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds = \frac{1}{x}\Big[\frac{(\arcsin s)^2}{2}\Big]_0^x = \frac{(\arcsin x)^2}{2x}$ då $x \neq 0$.

Eftersom $\dfrac{F(x) - F(0)}{x} = \dfrac{(\arcsin x)^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot (\dfrac{\arcsin x}{x})^2 \to 1/2$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärde, följer det av derivatans definition att $F'(0) = 1/2$. Svar: $F'(0) = 1/2$.