

Tentamen i Envariabelanalys 1

2009–04-16 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Bestäm en primitiv funktion till

(a) $e^{\sqrt{x+1}}$ (b) $\frac{3x}{x^2 + 5x + 4}$ (c) $\sin x \cos 2x$.

2. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x + 3}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

3. Undersök gränsvärdena

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$
(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x + 2 \ln x - 3 \ln(x + 1))$
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x + |x|)}{x}$.

4. Beräkna $\int_{1/3}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2 + x} dx$.

5. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$.

6. (a) Formulera medelvärdessatsen för integraler. (1p)

(b) Visa att $1 \leq \int_0^3 \frac{7}{x^3 - 3x + 3} dx \leq 21$. (2p)

7. Bestäm $F'(0)$, då $F(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2} \frac{\arcsin \frac{t}{x}}{\sqrt{x^4 - x^2 t^2}} dt & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$