Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2009–04-16 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $e^{\sqrt{x+1}}$ (b) $\dfrac{3x}{x^2+5x+4}$ (c) $\sin x \cos 2x$.

2. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{2x+3}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

3. Undersök gränsvärdena

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln 2x + 2\ln x - 3\ln(x+1)\right)$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x+|x|)}{x}$.

4. Beräkna $\displaystyle\int_{1/3}^{\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$.

5. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$.

6. (a) Formulera medelvärdessatsen för integraler. (1p)

   (b) Visa att $1 \le \displaystyle\int_0^3 \frac{7}{x^3-3x+3}\,dx \le 21$. (2p)

7. Bestäm $F'(0)$, då $F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\arcsin \frac{t}{x}}{\sqrt{x^4 - x^2 t^2}}\,dt & , \quad x \ne 0 \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases}$

Envariabelanalys 1, TATA41, 2009-04-16, lösningsförslag

1. (a) $\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx = /t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = t^2-1,\ t \geq 0, dx = 2tdt/ = \int 2te^t\,dt = $ /partiell integration/$= 2te^t - \int 2e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}} + C.$

   Svar: Exempelvis $2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}}$.

   (b) $\int \frac{3x}{x^2+5x+4}\,dx = /\frac{3x}{x^2+5x+4} = \frac{3x}{(x+4)(x+1)} = \frac{4}{x+4} - \frac{1}{x+1}/ =$
   $= \int (\frac{4}{x+4} - \frac{1}{x+1})\,dx = 4\ln|x+4| - \ln|x+1| + C.$

   Svar: Exempelvis $4\ln|x+4| - \ln|x+1|$.

   (c) $\int \sin x \cos 2x\,dx = \int \sin x(2\cos^2 x - 1)\,dx = -2\int(-\sin x)\cos^2 x\,dx - \int \sin x\,dx =$
   $= -\frac{2\cos^3 x}{3} + \cos x + C.$

   Svar: Exempelvis $\cos x - \frac{2\cos^3 x}{3}$.

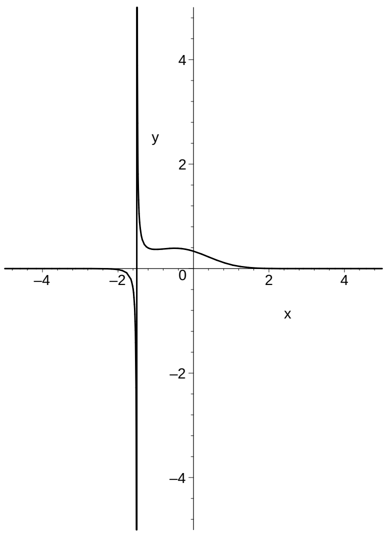
2. $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x+3} \to 0$ då $x \to \pm\infty$ och $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to -\frac{3}{2}\pm$.
   Således är x-axeln vågrät asymptot och linjen $x = -3/2$ lodrät asymptot.

   Vidare gäller att $f'(x) = e^{-x^2}(\frac{-2x}{2x+3} - \frac{2}{(2x+3)^2}) = -e^{-x^2}\frac{2x(2x+3)+2}{(2x+3)^2} =$
   $= -e^{-x^2}\frac{4(x+1)(x+1/2)}{(2x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = -1/2$.

   Teckenschemat

x		$-3/2$		-1		$-1/2$	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(-1/2)$	$\searrow$

   visar att f har lokalt min för $x = -1$ och lokalt max för $x = -1/2$.



3. (a) Gränsvärde av typ $\infty - \infty$.

$$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2x}{x(\sqrt{1+2/x}+1)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+2/x}+1} \to 1 \text{ då } x \to \infty.$$

Svar: Gränsvärdet är 1.

(b) Gränsvärde av typ $\infty - \infty$.

$$\ln 2x + 2\ln x - 3\ln(x+1) = \ln 2 + \ln x + 2\ln x - 3\ln(x+1) = \ln 2 + 3(\ln x - \ln(x+1)) =$$

$$= \ln 2 + 3\ln\frac{x}{x+1} = \ln 2 + 3\ln\frac{1}{1+1/x} \to \ln 2 + 3\ln 1 = \ln 2 \text{ då } x \to \infty.$$

Svar: Gränsvärdet är $\ln 2$.

(c) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

För $x > 0$ fås att $\frac{\sin(3x+|x|)}{x} = \frac{\sin(4x)}{x} = 4\cdot\frac{\sin(4x)}{4x} \to 4$ då $x \to 0+$ enligt standardgränsvärde.

För $x < 0$ fås att $\frac{\sin(3x+|x|)}{x} = \frac{\sin(2x)}{x} = 2\cdot\frac{\sin(2x)}{2x} \to 2$ då $x \to 0-$ enligt standardgränsvärde.

Eftersom vänstergränsvärdet och högergränsvärdet är olika saknas gränsvärde.

Svar: Gränsvärde saknas.

4. $$\int_{1/3}^{r} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0,\ dx = 2tdt/ = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{r}} \frac{2(1+t)}{t^3+t}\,dt =$$

$$= /\frac{2(1+t)}{t^3+t} = \frac{2(1+t)}{t(t^2+1)} = \frac{2}{t} - \frac{2t-2}{t^2+1}/ = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{r}} (\frac{2}{t} - \frac{2t}{t^2+1} + \frac{2}{t^2+1})\,dt =$$

$$= [2\ln|t| - \ln(t^2+1) + 2\arctan t]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{r}} = \ln\frac{r}{1+r} + 2\arctan\sqrt{r} - \ln\frac{1}{3} + \ln\frac{4}{3} - 2\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \ln\frac{1}{1+1/r} + 2\arctan\sqrt{r} + \ln 4 - \frac{\pi}{3} \to \frac{2\pi}{3} + \ln 4 \text{ då } r \to \infty$$

Svar: Värdet är $\frac{2\pi}{3} + \ln 4$.

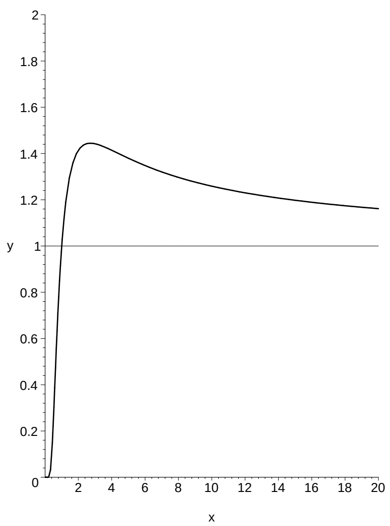
5. $f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}} \to 0$ då $x \to 0+$, ty $\dfrac{\ln x}{x} \to -\infty$ då $x \to 0+$, och $f(x) \to e^0 = 1$ då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärde.

$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ har endast nollstället $x = e$.

Teckenschemat

x	0		e	
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nexists$	$\nearrow$	$f(e)$	$\searrow$

visar att $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ är funktionens största värde. Gränsvärdena tillsammans med satsen om mellanliggande värden visar således att värdemängden är $]0, e^{\frac{1}{e}}]$.



Svar: Värdemängden är $]0, e^{\frac{1}{e}}]$.

6. (a) Se boken sid 288.

   (b) Sätt $p(x) = x^3 - 3x + 3$. Då gäller att $p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0$ endast har nollstället $x = 1$ i intervallet $[0, 3]$. En enkel teckenundersökning visar att $p(1) = 1$ är polynomets minsta värde på $[0, 3]$ medan $p(3) = 21$ är det största värdet. Således gäller att $\dfrac{7}{21} \le \dfrac{7}{x^3 - 3x + 3} \le 7$ på intervallet $[0, 3]$. Eftersom intervallängden är 3, är 1 en undersumma medan 21 är en översumma, varav olikheterna följer.

7. $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\arcsin \frac{t}{x}}{\sqrt{x^4 - x^2 t^2}}\, dt = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} \frac{\arcsin \frac{t}{x}}{\sqrt{1 - (\frac{t}{x})^2}}\, dt = /s = \frac{t}{x} \Leftrightarrow t = xs,\ dt = xds/ =$

$= \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \frac{\arcsin s}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds = \frac{1}{x}\Big[\frac{(\arcsin s)^2}{2}\Big]_0^x = \frac{(\arcsin x)^2}{2x}$ då $x \neq 0$.

Eftersom $\dfrac{F(x) - F(0)}{x} = \dfrac{(\arcsin x)^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot (\dfrac{\arcsin x}{x})^2 \to 1/2$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärde, följer det av derivatans definition att $F'(0) = 1/2$. Svar: $F'(0) = 1/2$.