Envariabelanalys 1, TATA41, 2009-03-11, lösningsförslag

1. (a) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx =$ / partiell integration/$= \dfrac{2x^{3/2}}{3} \ln x - \dfrac{2}{3} \int x^{1/2} \, dx =$

$= \dfrac{2x^{3/2}}{3} \ln x - \dfrac{4x^{3/2}}{9} + C.$ Svar: Exempelvis $\dfrac{2x^{3/2}}{3}(\ln x - 2/3).$

(b) $\int \dfrac{4}{x^3 + 2x^2} \, dx = /\dfrac{4}{x^3 + 2x^2} = \dfrac{4}{x^2(x+2)} = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}/ =$

$= \int (\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}) \, dx = -\dfrac{2}{x} - \ln|x| + \ln|x+2| + C.$

Svar: Exempelvis $\ln|x+2| - \dfrac{2}{x} - \ln|x|.$

(c) $\int e^{\sin x} \sin 2x \, dx = /e^{\sin x} \sin 2x = e^{\sin x} 2 \sin x \cos x, t = \sin x, dt = \cos x \, dx/ =$

$= 2 \int t e^t \, dt =$ /partiell integration/ $= 2te^t - 2 \int e^t \, dt = 2te^t - 2e^t + C =$

$= 2e^{\sin x} \sin x - 2e^{\sin x} + C.$ Svar: Exempelvis $2e^{\sin x} \sin x - 2e^{\sin x}.$

2. (a) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

$\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 4x} = \dfrac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot \dfrac{4x}{\sin 4x} \cdot \dfrac{3x}{4x} \to 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{3}{4} = 3/4$ då $x \to 0$ enligt standard-gränsvärden. Svar: Gränsvärdet är $3/4$.

(b) Gränsvärde av typ $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$\dfrac{x^2 e^{2x+1} + x^3 \cos x}{(e^{x + \ln x})^2} = /(e^{x+\ln x})^2 = e^{2x + 2\ln x} = x^2 e^{2x}/ = \dfrac{x^2 e^{2x}(e + \frac{x \cos x}{e^{2x}})}{x^2 e^{2x}} =$

$= e + \dfrac{x}{e^{2x}} \cdot \cos x \to e + 0 = e$ då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärde samt att cos är begränsad. Svar: Gränsvärdet är e.

(c) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

$\dfrac{\ln\sqrt{1+x}}{\ln(1+\sqrt{x})} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln(1+x)}{\ln(1+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\ln(1+x)}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+\sqrt{x})} \cdot \sqrt{x} \to \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ då $x \to 0$ enligt standardgränsvärde. Svar: Gränsvärdet är 0.

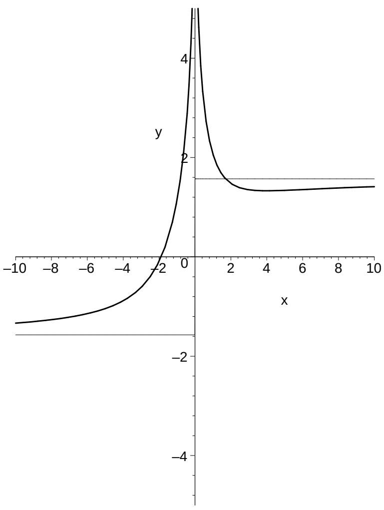
3. $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. $f(x) = \ln(x^2+4) - 2\ln|x| + \arctan \dfrac{x}{2} = \ln(1 + \dfrac{4}{x^2}) + \arctan \dfrac{x}{2} \to \pm \dfrac{\pi}{2}$ då $x \to \pm\infty$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to 0$. Således är $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ vågräta asymptoter och y-axeln en lodrät asymptot.

Vidare gäller att $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2(1+(\frac{x}{2})^2)} = \dfrac{2x^2 - 2(x^2+4) + 2x}{x(x^2+4)} = \dfrac{2(x-4)}{x(x^2+4)} =$ $0 \Leftrightarrow x = 4$.

Teckenschemat

x		0		4	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$

visar att $f(4)$ är ett lokalt min.



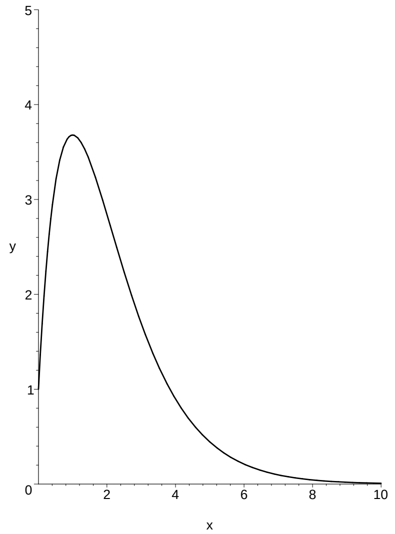
4. (a) Se boken sid 146.

(b) $f'(x) = (2x+8-(x^2+8x+1))e^{-x} = -(x-1)(x+7)e^{-x} = 0$ har endast nollstället $x = 1$ i intervallet $[0, \infty[$.

Teckenschemat

x	0		1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$

visar att $f(1) = \dfrac{10}{e}$ är funktionens största värde. Eftersom $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$, enligt standardgränsvärde, och $f(0) = 1$ saknas minsta värde.



Svar: Minsta värde saknas och största värde är $\dfrac{10}{e}$.

5. $\displaystyle\int_3^b \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\,dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 (t \geq 0), dx = 2tdt/ = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{b}} \frac{2\arctan t}{1+t^2}\,dt =$

$= [(\arctan t)^2]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{b}} = (\arctan\sqrt{b})^2 - (\arctan\sqrt{3})^2 \to (\dfrac{\pi}{2})^2 - (\dfrac{\pi}{3})^2 = \dfrac{5\pi^2}{36}$ då $b \to \infty$.

Svar: $\dfrac{5\pi^2}{36}$.

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}+x+\sqrt{x}+1}$ är en positiv och strängt avtagande funktion för $x \geq 0$.

Vidare gäller att $\displaystyle\int \frac{1}{x^{3/2}+x+\sqrt{x}+1}\,dx = /t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2 (t\geq 0), dx = 2tdt/ =$

$= \displaystyle\int \frac{2t}{t^3+t^2+t+1}\,dt = /\frac{2t}{t^3+t^2+t+1} = \frac{2t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{t+1}/ =$

$= \displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{1}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan t - \ln|t+1| + C =$

$= \dfrac{1}{2}\ln(x+1) + \arctan\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1) + C.$

En lämplig figur visar att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}+k+\sqrt{k}+1} = \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{3/2}+k+\sqrt{k}+1} <$

$< \displaystyle\frac{1}{4} + \int_1^n \frac{1}{x^{3/2}+x+\sqrt{x}+1}\,dx = \frac{1}{4} + [\frac{1}{2}\ln(x+1) + \arctan\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)]_1^n =$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\ln(n+1) + \arctan\sqrt{n} - \ln(\sqrt{n}+1) - (\dfrac{1}{2}\ln 2 + \arctan 1 - \ln 2) =$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{n+1}{(\sqrt{n}+1)^2} + \arctan\sqrt{n} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2} < \dfrac{\pi+1}{4} + \ln\sqrt{2}$

ty $\dfrac{n+1}{(\sqrt{n}+1)^2} = \dfrac{n+1}{n+1+2\sqrt{n}} < 1$ och $\arctan\sqrt{n} < \pi/2$.

7. Eftersom $\displaystyle\int_0^\infty y'(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b y'(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} y(b) - y(0)$ är konvergent så existerar $\displaystyle\lim_{b\to\infty} y(b) = A$.

Om $A > 0$ så existerar, enligt gränsvärdesdefinitionen, ω sådant att $x > \omega \Rightarrow f(x) > \dfrac{A}{2}$, varav följer att $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^\omega f(x)\,dx + \int_\omega^c f(x)\,dx > \int_0^\omega f(x)\,dx + (c-\omega)\frac{A}{2} \to \infty$ då $c \to \infty$ vilket motsäger att $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent.

Om $A < 0$ existerar ω sådant att $x > \omega \Rightarrow f(x) < \dfrac{A}{2}$, varav följer att $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx =$ $= \displaystyle\int_0^\omega f(x)\,dx + \int_\omega^c f(x)\,dx < \int_0^\omega f(x)\,dx + (c-\omega)\frac{A}{2} \to -\infty$ då $c \to \infty$ vilket också motsäger att $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent. Därför måste $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ gälla.