Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2009–03–11 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter $(n = 3, 4, 5)$. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm en primitiv funktion till
   (a) $\sqrt{x}\ln x$ (b) $\dfrac{4}{x^3+2x^2}$ (c) $e^{\sin x}\sin 2x$

2. Undersök
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{2x+1}+x^3\cos x}{(e^{x+\ln x})^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sqrt{1+x}}{\ln(1+\sqrt{x})}$

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \ln(x^2+4) - 2\ln|x| + \arctan\dfrac{x}{2}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

4. (a) Formulera satsen om största och minsta värde. (1p)
   (b) Bestäm, om möjligt, största och minsta värde hos funktionen $f(x) = (x^2+8x+1)e^{-x},\ x \geqslant 0$. (2p)

5. Beräkna $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\,dx$.

6. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{3/2}+k+\sqrt{k}+1} < \frac{\pi+1}{4} + \ln\sqrt{2}$ för alla heltal $n \geqslant 2$.

7. Antag att funktionen y är kontinuerligt deriverbar och att integralerna $\displaystyle\int_0^\infty y(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_0^\infty y'(x)\,dx$ är konvergenta. Visa att $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Envariabelanalys 1, TATA41, 2009-03-11, lösningsförslag

1. (a) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx = /$ partiell integration$/= \dfrac{2x^{3/2}}{3} \ln x - \dfrac{2}{3} \int x^{1/2} \, dx =$

$= \dfrac{2x^{3/2}}{3} \ln x - \dfrac{4x^{3/2}}{9} + C.$ Svar: Exempelvis $\dfrac{2x^{3/2}}{3}(\ln x - 2/3).$

(b) $\int \dfrac{4}{x^3+2x^2} \, dx = /\dfrac{4}{x^3+2x^2} = \dfrac{4}{x^2(x+2)} = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}/ =$

$= \int (\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}) \, dx = -\dfrac{2}{x} - \ln|x| + \ln|x+2| + C.$

Svar: Exempelvis $\ln|x+2| - \dfrac{2}{x} - \ln|x|.$

(c) $\int e^{\sin x} \sin 2x \, dx = /e^{\sin x} \sin 2x = e^{\sin x} 2 \sin x \cos x, t = \sin x, dt = \cos x \, dx/ =$

$= 2 \int te^t \, dt = /$partiell integration$/ = 2te^t - 2 \int e^t \, dt = 2te^t - 2e^t + C =$

$= 2e^{\sin x} \sin x - 2e^{\sin x} + C.$ Svar: Exempelvis $2e^{\sin x} \sin x - 2e^{\sin x}.$

2. (a) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

$\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 4x} = \dfrac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot \dfrac{4x}{\sin 4x} \cdot \dfrac{3x}{4x} \to 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{3}{4} = 3/4$ då $x \to 0$ enligt standardgränsvärden. Svar: Gränsvärdet är $3/4$.

(b) Gränsvärde av typ $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$\dfrac{x^2 e^{2x+1} + x^3 \cos x}{(e^{x+\ln x})^2} = /(e^{x+\ln x})^2 = e^{2x+2\ln x} = x^2 e^{2x}/ = \dfrac{x^2 e^{2x}(e + \frac{x \cos x}{e^{2x}})}{x^2 e^{2x}} =$

$= e + \dfrac{x}{e^{2x}} \cdot \cos x \to e + 0 = e$ då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärde samt att cos är begränsad. Svar: Gränsvärdet är e.

(c) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

$\dfrac{\ln\sqrt{1+x}}{\ln(1+\sqrt{x})} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln(1+x)}{\ln(1+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\ln(1+x)}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+\sqrt{x})} \cdot \sqrt{x} \to \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ då $x \to 0$ enligt standardgränsvärde. Svar: Gränsvärdet är 0.

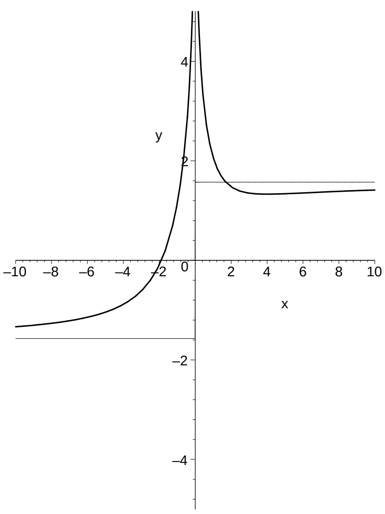
3. $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. $f(x) = \ln(x^2+4) - 2\ln|x| + \arctan \dfrac{x}{2} = \ln(1 + \dfrac{4}{x^2}) + \arctan \dfrac{x}{2} \to \pm\dfrac{\pi}{2}$ då $x \to \pm\infty$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to 0$. Således är $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ vågräta asymptoter och y-axeln en lodrät asymptot.

Vidare gäller att $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2(1+(\frac{x}{2})^2)} = \dfrac{2x^2 - 2(x^2+4) + 2x}{x(x^2+4)} = \dfrac{2(x-4)}{x(x^2+4)} = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Teckenschemat

x		0		4	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$

visar att $f(4)$ är ett lokalt min.



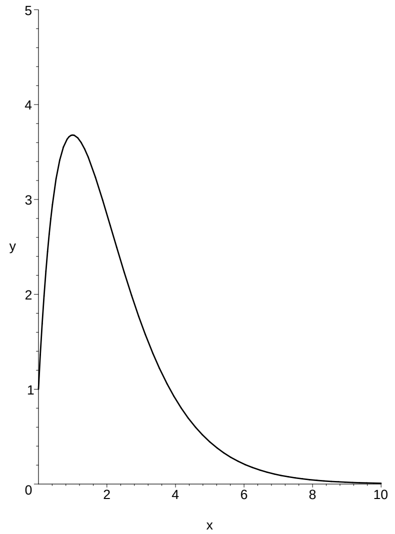
4. (a) Se boken sid 146.

(b) $f'(x) = (2x+8-(x^2+8x+1))e^{-x} = -(x-1)(x+7)e^{-x} = 0$ har endast nollstället $x = 1$ i intervallet $[0, \infty[$.

Teckenschemat

x	0		1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$

visar att $f(1) = \dfrac{10}{e}$ är funktionens största värde. Eftersom $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$, enligt standardgränsvärde, och $f(0) = 1$ saknas minsta värde.



Svar: Minsta värde saknas och största värde är $\dfrac{10}{e}$.

5. $\displaystyle\int_3^b \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\,dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 (t \geq 0), dx = 2tdt/ = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{b}} \frac{2\arctan t}{1+t^2}\,dt =$

$\displaystyle= [(\arctan t)^2]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{b}} = (\arctan\sqrt{b})^2 - (\arctan\sqrt{3})^2 \to (\frac{\pi}{2})^2 - (\frac{\pi}{3})^2 = \frac{5\pi^2}{36}$ då $b \to \infty$.

Svar: $\dfrac{5\pi^2}{36}$.

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^{3/2} + x + \sqrt{x} + 1}$ är en positiv och strängt avtagande funktion för $x \geq 0$.

Vidare gäller att $\displaystyle\int \frac{1}{x^{3/2} + x + \sqrt{x} + 1}\, dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 (t \geq 0), dx = 2t dt/ =$

$$= \int \frac{2t}{t^3 + t^2 + t + 1}\, dt = /\frac{2t}{t^3 + t^2 + t + 1} = \frac{2t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{t+1}/ =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\, dt + \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{1}{t+1}\, dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan t - \ln|t+1| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x+1) + \arctan\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

En lämplig figur visar att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2} + k + \sqrt{k} + 1} = \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{3/2} + k + \sqrt{k} + 1} <$

$$< \frac{1}{4} + \int_1^n \frac{1}{x^{3/2} + x + \sqrt{x} + 1}\, dx = \frac{1}{4} + [\frac{1}{2}\ln(x+1) + \arctan\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)]_1^n =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(n+1) + \arctan\sqrt{n} - \ln(\sqrt{n}+1) - (\frac{1}{2}\ln 2 + \arctan 1 - \ln 2) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{(\sqrt{n}+1)^2} + \arctan\sqrt{n} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} < \frac{\pi+1}{4} + \ln\sqrt{2}$$

ty $\dfrac{n+1}{(\sqrt{n}+1)^2} = \dfrac{n+1}{n+1+2\sqrt{n}} < 1$ och $\arctan\sqrt{n} < \pi/2$.

7. Eftersom $\displaystyle\int_0^\infty y'(x)\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b y'(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} y(b) - y(0)$ är konvergent så existerar $\displaystyle\lim_{b\to\infty} y(b) = A$.

Om $A > 0$ så existerar, enligt gränsvärdesdefinitionen, ω sådant att $x > \omega \Rightarrow f(x) > \dfrac{A}{2}$, varav följer att $\displaystyle\int_0^c f(x)\, dx = \int_0^\omega f(x)\, dx + \int_\omega^c f(x)\, dx > \int_0^\omega f(x)\, dx + (c-\omega)\frac{A}{2} \to \infty$ då $c \to \infty$ vilket motsäger att $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ är konvergent.

Om $A < 0$ existerar ω sådant att $x > \omega \Rightarrow f(x) < \dfrac{A}{2}$, varav följer att $\displaystyle\int_0^c f(x)\, dx =$ $\displaystyle= \int_0^\omega f(x)\, dx + \int_\omega^c f(x)\, dx < \int_0^\omega f(x)\, dx + (c-\omega)\frac{A}{2} \to -\infty$ då $c \to \infty$ vilket också motsäger att $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ är konvergent. Därför måste $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ gälla.