Envariabelanalys 1, TATA41, 2009-01-14, lösningsförslag

1. $D_f = \mathbf{R}$ och $f(x) = \arctan x - \arctan 4x \to \pm\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2} = 0$ då $x \to \pm\infty$. Således är x-axeln en vågrät asymptot.

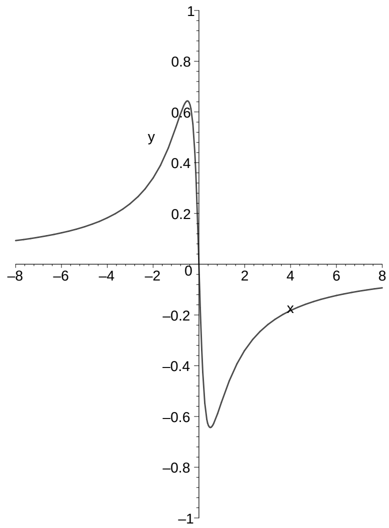
   Vidare gäller att $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{4}{1+16x^2} = \dfrac{12x^2-3}{(1+x^2)(1+16x^2)} = \dfrac{12(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})}{(1+x^2)(1+16x^2)} =$

   $= 0 \iff x = -1/2$ eller $x = 1/2$.

   Teckenschemat

x		$-1/2$		$1/2$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1/2)$	$\searrow$	$f(1/2)$	$\nearrow$

   visar att $f(-1/2)$ är ett lokalt max medan $f(1/2)$ är ett lokalt min.



2. (a) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

   $$\frac{x^2-7x+10}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-5}{x+3} \to -3/5 \text{ då } x \to 2.$$

   Svar: Gränsvärdet är $-3/5$.

   (b) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

   $$\frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{\ln x}{(x+1)(x-1)} = \Big/\, t = x-1 \iff x = 1+t,\ x \to 1 \iff t \to 0 \,\Big/ =$$

   $$= \frac{\ln(1+t)}{t(2+t)} = \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{1}{2+t} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = 1/2 \text{ då } t \to 0 \text{ enligt standardgränsvärde.}$$

   Svar: Gränsvärdet är $1/2$.

   (c) Gränsvärde av typ $\infty(\infty - \infty)$.

   $$x^2(\ln(x+1)+\ln(x-1)-2\ln x) = x^2 \ln\frac{x^2-1}{x^2} = x^2\ln(1-\frac{1}{x^2}) = -\frac{\ln(1-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} \to -1$$

   då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärde. Svar: Gränsvärdet är -1.

3. (a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-x-2}\,dx = \Big/ \frac{x}{x^2-x-2} = \frac{x}{(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} \Big/ =$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$

Svar: Exempelvis $\displaystyle\frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1|$.

(b) $\displaystyle\int x\ln\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int x\ln x\,dx = \Big/\text{partiell integration}\Big/ = \frac{x^2}{4}\ln x - \int \frac{x}{4}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{8} + C.$ Svar: Exempelvis $\displaystyle\frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{8}$.

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-4\cos^2 x}\,dx = \Big/ t=\cos x, dt = -\sin x dx \Big/ =$

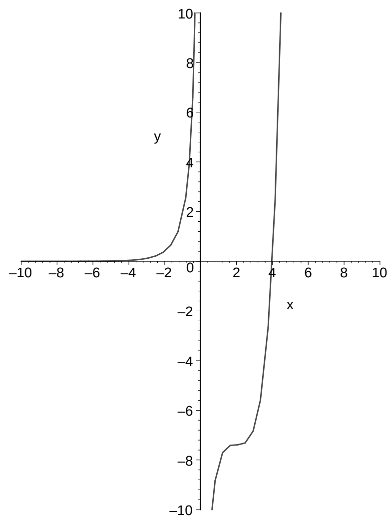
$\displaystyle = \int \frac{dt}{4t^2-1}\,dt = \Big/ \frac{1}{4t^2-1} = \frac{1}{4(t+\frac{1}{2})(t-\frac{1}{2})} = -\frac{\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{t-\frac{1}{2}} \Big/ =$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-\frac{1}{2}}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{4}(\ln|t-\frac{1}{2}| - \ln|t+\frac{1}{2}|) + C = \frac{1}{4}\ln|\frac{\cos x - 1/2}{\cos x + 1/2}| + C.$

Svar: Exempelvis $\displaystyle\frac{1}{4}\ln|\frac{\cos x - 1/2}{\cos x + 1/2}|$.

4. Sätt $f(x) = (1-\frac{4}{x})e^x$. Då gäller att $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ och att $f'(x) = (1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2})e^x = \frac{(x-2)^2}{x^2}e^x > 0$ utom då $x=2$. Således är f strängt växande på intervallet $]-\infty,0[$ och strängt växande på intervallet $]0,\infty[$.

Vidare gäller att $f(x)\to 0$ då $x\to-\infty$, $f(x)\to\infty$ då $x\to 0-$, $f(x)\to-\infty$ då $x\to 0+$ och $f(x)\to\infty$ då $x\to\infty$.



Grafen visar att ekvationen $f(x)=k$ har exakt en lösning för $k\le 0$ och två lösningar för $k>0$. Svar: En lösning för $k\le 0$ och två lösningar för $k>0$.

5. (a) Se boken.

(b) $\displaystyle\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$ då $h\to 0$. Enligt derivatans definition gäller således att $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(c) För att $f'(0)$ skall existera måste f vara kontinuerlig för $x = 0$, dvs $A = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x + x^2\cos\frac{1}{x^2}) = 0$, ty $\cos\frac{1}{x^2}$ är en begränsad funktion.
Då $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{x + x^2\cos\frac{1}{x^2}}{x} = 1 + x\cos\dfrac{1}{x^2} \to 1 + 0 = 1$ då $x \to 0$ följer att $f'(0) = 1$.

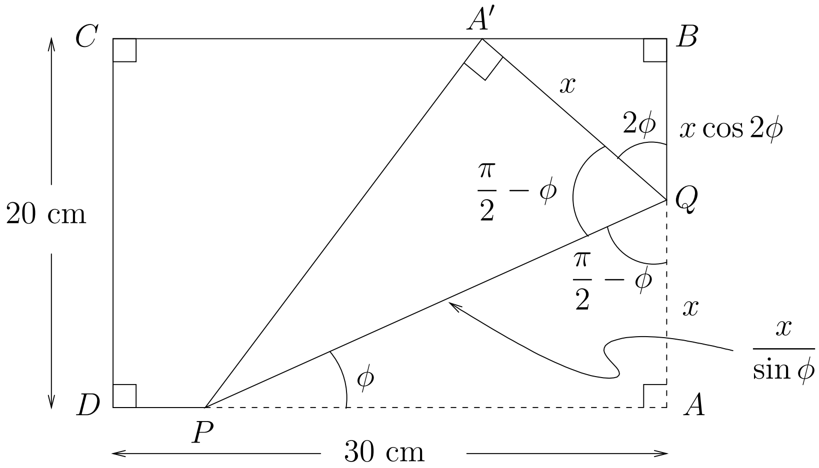
Svar: $f'(0) = 1$.

6. Obegränsat intervall.

$$\int_0^R \frac{x\ln(1+x)}{(4+x^2)^2}\,dx = \Big/\mathrm{PI}\Big/ = \left[-\frac{\frac{1}{2}}{4+x^2}\ln(1+x)\right]_0^R + \frac{1}{2}\int_0^R \frac{dx}{(4+x^2)(x+1)} =$$
$$= -\frac{\ln(1+R)}{2(4+R^2)} + \frac{1}{10}\int_0^R \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{10}\int_0^R \frac{1-x}{4+x^2}\,dx = -\frac{\ln(1+R)}{2(4+R^2)} + \frac{1}{10}\Big[\ln(1+x)\Big]_0^R +$$
$$+ \frac{1}{20}\left[\arctan\frac{x}{2}\right]_0^R - \frac{1}{20}\Big[\ln(4+x^2)\Big]_0^R = -\frac{\ln(1+R)}{2(4+R^2)} + \frac{\ln(1+R)}{10} - \frac{\ln(4+R^2)}{20} + \frac{\ln 4}{20} +$$
$$+ \frac{\arctan\frac{R}{2}}{20} = -\frac{\ln(1+R)}{2(4+R^2)} + \frac{1}{20}\ln\frac{(1+R)^2}{4+R^2} + \frac{\ln 2}{10} + \frac{\arctan\frac{R}{2}}{20} \to 0 + 0 + \frac{\ln 2}{10} + \frac{\pi}{40} =$$
$$= \frac{\ln 2}{10} + \frac{\pi}{40} \text{ då } R \to \infty, \text{ ty } \ln\frac{(1+R)^2}{4+R^2} = \ln(1 + \frac{2}{R + 4/R}) \to \ln 1 = 0 \text{ då } R \to \infty.$$

Svar: $\dfrac{4\ln 2 + \pi}{40}$.

7. Beteckna längden av sträckan AQ med x cm och vinkeln APQ med ϕ.



Eftersom vinkeln AQP = vinkeln $PQA' = \frac{\pi}{2} - \phi$ följer att vinkeln $A'QB = =\pi - 2(\frac{\pi}{2} - \phi) = 2\phi$. Då längden av sträckan $A'Q = AQ = x$ fås att $x + x\cos 2\phi = 20 \iff x\cdot 2\cos^2\phi = 20 \iff$
$\iff x\cos^2\phi = 10 \iff x - 10 = x\sin^2\phi \iff \sin^2\phi = \dfrac{x-10}{x}$, speciellt att $x > 10$.

Längden i kvadrat av sträckan PQ är $l(x) = \dfrac{x^2}{\sin^2\phi} = \dfrac{x^3}{x-10}$. $l'(x) = \dfrac{2x^2(x-15)}{(x-10)^2}$ och en enkel teckenundersökning visar att $l(15) = 3\cdot 15^2$ är det minsta värdet.

Det återstår att visa att punkten P, för $x = 15$, ligger mellan punkterna D och A. Detta följer av Pythagoras sats, ty $3\cdot 15^2 - 15^2 = 450 < 30^2$.

Svar: Punkten Q ligger 15 cm ovanför punkten A.