

Tentamen i Envariabelanalys 1 (TATA41/TEN1)

2009–01–14 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedöms med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \arctan x - \arctan 4x$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + x - 6}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\ln(x + 1) + \ln(x - 1) - 2 \ln x)$.

3. Bestäm en primitiv funktion till

(a) $\frac{x}{x^2 - x - 2}$

(b) $x \ln \sqrt{x}$

(c) $\frac{\sin x}{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}$.

4. Bestäm, för varje tal k , antal olika reella lösningar till ekvationen $\left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x = k$.

5. (a) Definiera vad som menas med att f är deriverbar i punkten a .

(b) Härled derivatan av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$.

(c) Låt $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos \frac{1}{x^2} & , \text{ då } x \neq 0 \\ A & , \text{ då } x = 0. \end{cases}$

Bestäm (om möjligt) talet A så

att $f'(0)$ existerar. Vad blir i så fall $f'(0)$.

6. Beräkna $\int_0^{\infty} \frac{x \ln(1+x)}{(4+x^2)^2} dx$.

7. Man viker ett pappersark så som figuren visar, så att hörnet A' hamnar på kanten BC . Ange punkten Q 's position för att vektet PQ ska bli så kort som möjligt.

