Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 1 (TATA41/TEN1)

2009–01–14 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \arctan x - \arctan 4x$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2+x-6}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(\ln(x+1)+\ln(x-1)-2\ln x\right)$.

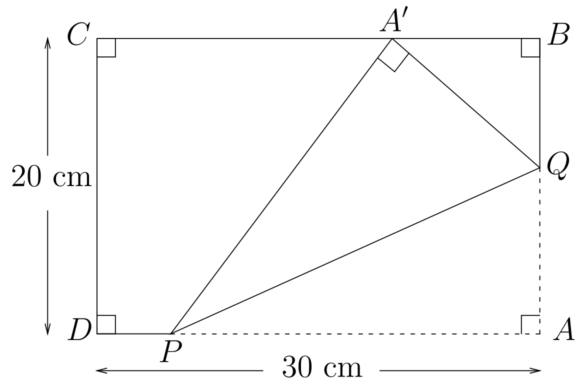
3. Bestäm en primitiv funktion till
   (a) $\dfrac{x}{x^2-x-2}$ (b) $x\ln\sqrt{x}$ (c) $\dfrac{\sin x}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}$.

4. Bestäm, för varje tal k, antal olika reella lösningar till ekvationen $\left(1-\dfrac{4}{x}\right)e^x = k$.

5. (a) Definiera vad som menas med att f är deriverbar i punkten a.
   (b) Härled derivatan av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$.
   (c) Låt $f(x) = \begin{cases} x + x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & , \text{ då } x \neq 0 \\ A & , \text{ då } x = 0. \end{cases}$ Bestäm (om möjligt) talet A så att $f'(0)$ existerar. Vad blir i så fall $f'(0)$.

6. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln(1+x)}{(4+x^2)^2}\,dx$.

7. Man viker ett pappersark så som figuren visar, så att hörnet A' hamnar på kanten BC. Ange punkten Q:s position för att vecket PQ ska bli så kort som möjligt.



Envariabelanalys 1, TATA41, 2009-01-14, lösningsförslag

1. $D_f = \mathbf{R}$ och $f(x) = \arctan x - \arctan 4x \to \pm\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2} = 0$ då $x \to \pm\infty$. Således är x-axeln en vågrät asymptot.

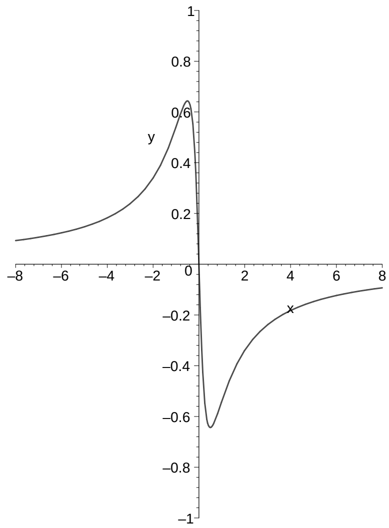
   Vidare gäller att $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{4}{1+16x^2} = \dfrac{12x^2-3}{(1+x^2)(1+16x^2)} = \dfrac{12(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})}{(1+x^2)(1+16x^2)} =$

   $= 0 \iff x = -1/2$ eller $x = 1/2$.

   Teckenschemat

x		$-1/2$		$1/2$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1/2)$	$\searrow$	$f(1/2)$	$\nearrow$

   visar att $f(-1/2)$ är ett lokalt max medan $f(1/2)$ är ett lokalt min.



2. (a) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

   $$\frac{x^2-7x+10}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-5}{x+3} \to -3/5 \text{ då } x \to 2.$$

   Svar: Gränsvärdet är $-3/5$.

   (b) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

   $$\frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{\ln x}{(x+1)(x-1)} = \Big/\, t = x-1 \iff x = 1+t,\ x \to 1 \iff t \to 0 \,\Big/ =$$

   $$= \frac{\ln(1+t)}{t(2+t)} = \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{1}{2+t} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = 1/2 \text{ då } t \to 0 \text{ enligt standardgränsvärde.}$$

   Svar: Gränsvärdet är $1/2$.

   (c) Gränsvärde av typ $\infty(\infty - \infty)$.

   $$x^2(\ln(x+1)+\ln(x-1)-2\ln x) = x^2 \ln\frac{x^2-1}{x^2} = x^2\ln(1-\frac{1}{x^2}) = -\frac{\ln(1-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} \to -1$$

   då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärde. Svar: Gränsvärdet är -1.

3. (a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-x-2}\,dx = \Big/ \frac{x}{x^2-x-2} = \frac{x}{(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} \Big/ =$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$$

Svar: Exempelvis $\frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1|$.

(b) $\displaystyle\int x\ln\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int x\ln x\,dx = \Big/\text{partiell integration}\Big/ = \frac{x^2}{4}\ln x - \int \frac{x}{4}\,dx =$

$= \frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{8} + C.$ Svar: Exempelvis $\frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{8}$.

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-4\cos^2 x}\,dx = \Big/ t=\cos x, dt = -\sin x dx \Big/ =$

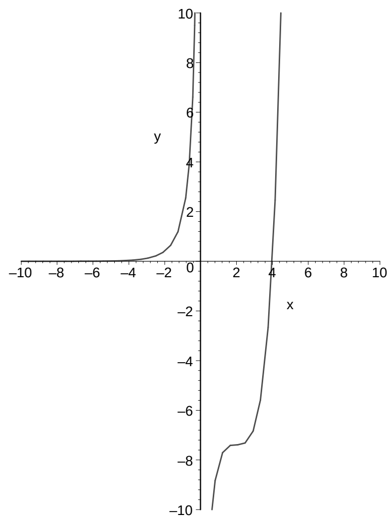
$$= \int \frac{dt}{4t^2-1}\,dt = /\frac{1}{4t^2-1} = \frac{1}{4(t+\frac{1}{2})(t-\frac{1}{2})} = -\frac{\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{t-\frac{1}{2}}/ =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-\frac{1}{2}}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{4}(\ln|t-\frac{1}{2}| - \ln|t+\frac{1}{2}|) + C = \frac{1}{4}\ln|\frac{\cos x - 1/2}{\cos x + 1/2}| + C.$$

Svar: Exempelvis $\frac{1}{4}\ln|\frac{\cos x - 1/2}{\cos x + 1/2}|$.

4. Sätt $f(x) = (1-\frac{4}{x})e^x$. Då gäller att $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ och att $f'(x) = (1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2})e^x = \frac{(x-2)^2}{x^2}e^x > 0$ utom då $x=2$. Således är f strängt växande på intervallet $]-\infty, 0[$ och strängt växande på intervallet $]0,\infty[$.

Vidare gäller att $f(x)\to 0$ då $x\to-\infty$, $f(x)\to\infty$ då $x\to 0-$, $f(x)\to-\infty$ då $x\to 0+$ och $f(x)\to\infty$ då $x\to\infty$.



Grafen visar att ekvationen $f(x) = k$ har exakt en lösning för $k\le 0$ och två lösningar för $k>0$. Svar: En lösning för $k\le 0$ och två lösningar för $k>0$.

5. (a) Se boken.

(b) $\displaystyle\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$ då $h\to 0$. Enligt derivatans definition gäller således att $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(c) För att $f'(0)$ skall existera måste f vara kontinuerlig för $x = 0$, dvs $A = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x + x^2\cos\frac{1}{x^2}) = 0$, ty $\cos\frac{1}{x^2}$ är en begränsad funktion.
Då $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{x + x^2\cos\frac{1}{x^2}}{x} = 1 + x\cos\dfrac{1}{x^2} \to 1 + 0 = 1$ då $x \to 0$ följer att $f'(0) = 1$.

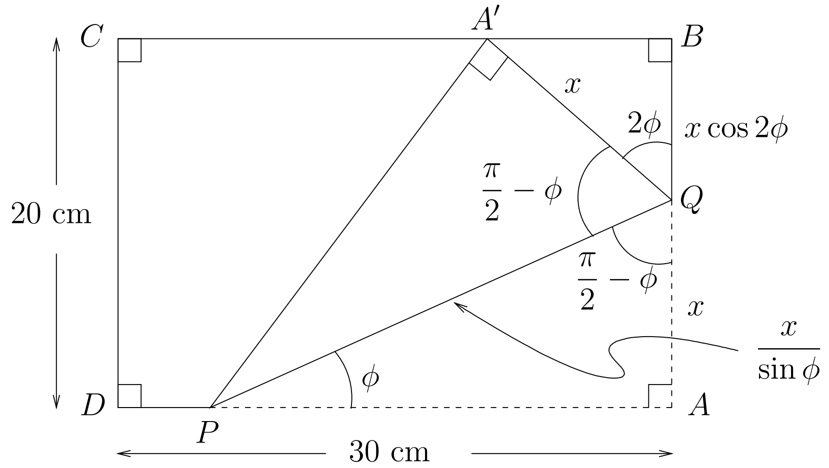
Svar: $f'(0) = 1$.

6. Obegränsat intervall.

$$\int_0^R \frac{x\ln(1+x)}{(4+x^2)^2}\,dx = \Big/\mathrm{PI}\Big/ = \left[-\frac{\frac{1}{2}}{4+x^2}\ln(1+x)\right]_0^R + \frac{1}{2}\int_0^R \frac{dx}{(4+x^2)(x+1)} =$$
$$= -\frac{\ln(1+R)}{2(4+R^2)} + \frac{1}{10}\int_0^R \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{10}\int_0^R \frac{1-x}{4+x^2}\,dx = -\frac{\ln(1+R)}{2(4+R^2)} + \frac{1}{10}\Big[\ln(1+x)\Big]_0^R +$$
$$+ \frac{1}{20}\left[\arctan\frac{x}{2}\right]_0^R - \frac{1}{20}\Big[\ln(4+x^2)\Big]_0^R = -\frac{\ln(1+R)}{2(4+R^2)} + \frac{\ln(1+R)}{10} - \frac{\ln(4+R^2)}{20} + \frac{\ln 4}{20} +$$
$$+ \frac{\arctan\frac{R}{2}}{20} = -\frac{\ln(1+R)}{2(4+R^2)} + \frac{1}{20}\ln\frac{(1+R)^2}{4+R^2} + \frac{\ln 2}{10} + \frac{\arctan\frac{R}{2}}{20} \to 0 + 0 + \frac{\ln 2}{10} + \frac{\pi}{40} =$$
$$= \frac{\ln 2}{10} + \frac{\pi}{40} \text{ då } R \to \infty, \text{ ty } \ln\frac{(1+R)^2}{4+R^2} = \ln(1 + \frac{2}{R + 4/R}) \to \ln 1 = 0 \text{ då } R \to \infty.$$

Svar: $\dfrac{4\ln 2 + \pi}{40}$.

7. Beteckna längden av sträckan AQ med x cm och vinkeln APQ med ϕ.



Eftersom vinkeln AQP = vinkeln $PQA' = \frac{\pi}{2} - \phi$ följer att vinkeln $A'QB = =\pi - 2(\frac{\pi}{2} - \phi) = 2\phi$. Då längden av sträckan $A'Q = AQ = x$ fås att $x + x\cos 2\phi = 20 \iff x\cdot 2\cos^2\phi = 20 \iff$

$\iff x\cos^2\phi = 10 \iff x - 10 = x\sin^2\phi \iff \sin^2\phi = \dfrac{x-10}{x}$, speciellt att $x > 10$.

Längden i kvadrat av sträckan PQ är $l(x) = \dfrac{x^2}{\sin^2\phi} = \dfrac{x^3}{x-10}$. $l'(x) = \dfrac{2x^2(x-15)}{(x-10)^2}$ och en enkel teckenundersökning visar att $l(15) = 3\cdot 15^2$ är det minsta värdet.

Det återstår att visa att punkten P, för $x = 15$, ligger mellan punkterna D och A. Detta följer av Pythagoras sats, ty $3\cdot 15^2 - 15^2 = 450 < 30^2$.

Svar: Punkten Q ligger 15 cm ovanför punkten A.