Envariabelanalys 1, TATA41, 2008-08-23, lösningsförslag

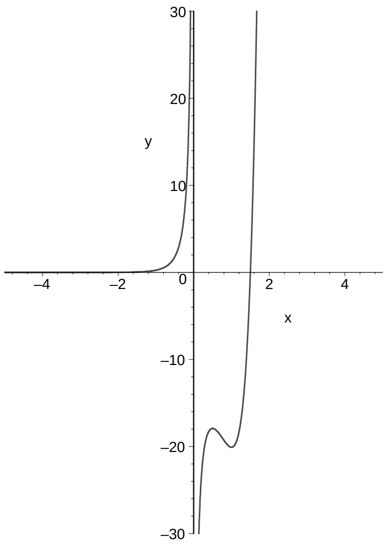
1. $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. $f(x) = (2 - \frac{3}{x})e^{3x} \to \infty$ då $x \to 0-$ eller $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0+$ och $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$. Således är $x = 0$ en lodrät aymptot och x-axeln en vågrät asymptot då $x \to -\infty$.

   Vidare gäller att $f'(x) = (\frac{3}{x^2} + 6 - \frac{9}{x})e^{3x} = \frac{6(x-1/2)(x-1)}{x^2}e^{3x} = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$ eller $x = 1$.

   Teckenschemat

x		0		$1/2$		1	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$f(1/2)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

   visar att $f(1/2) = -4e^{3/2}$ är ett lokalt max medan $f(1) = -e^3$ är ett lokalt min.



2. (a) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

   $$\frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2} \to 2/3 \text{ då } x \to -1.$$

   Svar: Gränsvärdet är 2/3.

   (b) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.

   $\frac{e^{\sin x}-1}{\ln(1+3x)} = \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{3x}{\ln(1+3x)} \cdot \frac{1}{3} \to 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ då $x \to 0$ enligt standardgränsvärden.

   Svar: Gränsvärdet är 1/3.

   (c) Gränsvärde av typ $\frac{\infty}{\infty}$.

   $$\frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x+x^2)} = \frac{\ln x^3(1+\frac{1}{x^3})}{\ln x^2(1+\frac{1}{x})} = \frac{3\ln x + \ln(1+\frac{1}{x^3})}{2\ln x + \ln(1+\frac{1}{x})} = \frac{3 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^3})}{\ln x}}{2 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}} \to \frac{3}{2} \text{ då } x \to \infty.$$

   Svar: Gränsvärdet är 3/2.

3. (a) $\int x \ln x \, dx =$/partiell integration/$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

   Svar: Exempelvis $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$.

   (b) $\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}\,dx = /\frac{x+3}{x^2+4+5} = \frac{x+3}{(x+2)^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1} + \frac{1}{(x+2)^2+1}/ = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1}\,dx + \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) + \arctan(x+2) + C$

   Svar: Exempelvis $\frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) + \arctan(x+2)$.

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 5\sin x + 6}\, dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x + 5\sin x + 6}\, dx = /t = \sin x, dt = \cos x dx/ = \int \frac{2t}{t^2+5t+6}\, dt = \int \frac{6}{t+3}\, dt - \int \frac{4}{t+2}\, dt = 6\ln|t+3| - 4\ln|t+2| + C = 6\ln(3+\sin x) - 4\ln(2+\sin x) + C.$ Svar: Exempelvis $6\ln(3+\sin x) - 4\ln(2+\sin x)$.

4. Sätt $f(x) = \ln(1+2x) - 2x + 2x^2$ då $x \geq 0$. Eftersom $f'(x) = \dfrac{2}{1+2x} - 2 + 4x = \dfrac{8x^2}{1+2x} > 0$, då $x > 0$, är f strängt växande och då $f(0) = 0$ följer att $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+2x) \geq 2x - 2x^2$ för alla $x \geq 0$.

5. (a) f är strängt växande om $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

   (b) Notera att $g(x) = x$ om $x \leq 0$ och att $g(x) = 3x$ om $x \geq 0$.
   Om $x < y \leq 0$ gäller att $0 < y - x = g(y) - g(x) \Rightarrow g(x) < g(y)$.
   Om $x < 0 < y$ gäller att $0 < 3y - x = g(y) - g(x) \Rightarrow g(x) < g(y)$.
   Och om $0 \leq x < y$ gäller att $0 < 3y - 3x = g(y) - g(x) \Rightarrow g(x) < g(y)$.
   Sammantaget visar detta att g är strängt växande.

   (c) Sätt $f_1(x) = f_2(x) = x$. Då är både f_1 och f_2 strängt växande men $h(x) = x^2$ är det inte.

6. Låt h vara höjden och d vara diametern. Då gäller att $V = \dfrac{\pi d^2 h}{4} \Leftrightarrow h = \dfrac{4V}{\pi d^2}$ och begränsningsarean $A(d) = 2\cdot\dfrac{\pi d^2}{4} + \pi d h = \dfrac{\pi d^2}{2} + \dfrac{4V}{d} \to \infty$ då $d \to 0+$ eller $d \to \infty$. $A'(d) = \pi d - \dfrac{4V}{d^2} = \dfrac{\pi d^3 - 4V}{d^2} = 0 \Leftrightarrow d = (\dfrac{4V}{\pi})^{1/3}$. Gränsvärdena avslöjar att detta ger den minsta begränsningsarean. För $d^3 = \dfrac{4V}{\pi}$ fås att $\dfrac{h}{d} = \dfrac{4V}{\pi d^3} = 1$.
Svar: Förhållandet är 1.

7. $\displaystyle\int_\epsilon^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x}\, dx = /\text{PI}/ = [-x\cot x]_\epsilon^{\pi/2} + \int_\epsilon^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \frac{\epsilon\cos\epsilon}{\sin\epsilon} + [\ln\sin x]_\epsilon^{\pi/2} = \frac{\epsilon}{\sin\epsilon}\cdot\cos\epsilon - \ln\sin\epsilon \to 1\cdot 1 + \infty = \infty$ då $\epsilon \to 0+$. Integralen är således divergent.

$\displaystyle\int_\epsilon^{\pi/2} (\frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x})\, dx = \frac{\epsilon}{\sin\epsilon}\cdot\cos\epsilon - \ln\sin\epsilon - [\ln x]_\epsilon^{\pi/2} = \frac{\epsilon}{\sin\epsilon}\cdot\cos\epsilon + \ln\frac{\epsilon}{\sin\epsilon} - \ln\frac{\pi}{2} \to 1 + \ln 1 - \ln\frac{\pi}{2} = 1 - \ln\frac{\pi}{2}$ då $\epsilon \to 0+$. Svar: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x})\, dx = 1 - \ln\frac{\pi}{2}$.