Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 1 (TATA41)

2008–08–23 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right) e^{3x}$. Alla lokala maxima och minima samt lodräta och vågräta asymptoter måste framgå, om sådana finns.

2. Undersök

   (a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\ln(1+3x)}$ (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x+x^2)}$.

3. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $x \ln x$ (b) $\frac{x+3}{x^2+4x+5}$ (c) $\frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 5\sin x + 6}$

4. Visa att $\ln(1+2x) \geq 2x - 2x^2$ för alla $x \geq 0$.

5. (a) Funktionen f är definierad för alla reella tal. Definiera vad som menas med att f är strängt växande.

   (b) Låt $g(x) = 2x + |x|$. Är g strängt växande?

   (c) Funktionerna f_1 och f_2 är strängt växande och definierade för alla reella x. Låt $h(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. Är h strängt växande? Bevis eller motexempel krävs.

6. En konservburk har formen av en rät cirkulär cylinder med given volym V. Hur ska förhållandet mellan burkens höjd och diameter vara, för att burkens totala begränsningsarea (inklusive botten och lock) ska bli så liten som möjligt?

7. Betrakta de båda integralerna $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$ och $\int_0^{\pi/2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x}\right) dx$. Visa att exakt en av integralerna är konvergent och beräkna värdet av denna.

Envariabelanalys 1, TATA41, 2008-08-23, lösningsförslag

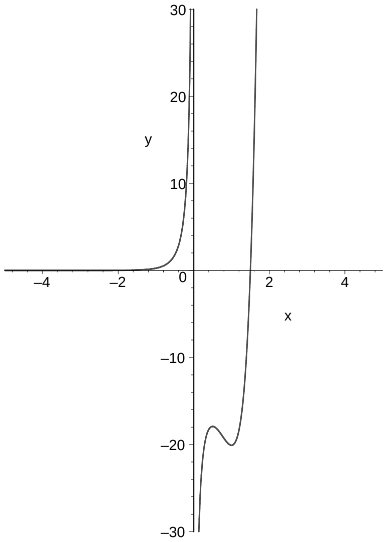
1. $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. $f(x) = (2 - \dfrac{3}{x})e^{3x} \to \infty$ då $x \to 0-$ eller $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0+$ och $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$. Således är $x = 0$ en lodrät aymptot och x-axeln en vågrät asymptot då $x \to -\infty$.

   Vidare gäller att $f'(x) = (\dfrac{3}{x^2} + 6 - \dfrac{9}{x})e^{3x} = \dfrac{6(x-1/2)(x-1)}{x^2}e^{3x} = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$ eller $x = 1$.

   Teckenschemat

x		0		1/2		1	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$f(1/2)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

   visar att $f(1/2) = -4e^{3/2}$ är ett lokalt max medan $f(1) = -e^3$ är ett lokalt min.



2. (a) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

   $$\frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2} \to 2/3 \text{ då } x \to -1.$$

   Svar: Gränsvärdet är 2/3.

   (b) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

   $$\frac{e^{\sin x}-1}{\ln(1+3x)} = \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{3x}{\ln(1+3x)} \cdot \frac{1}{3} \to 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$ då $x \to 0$ enligt standardgränsvärden.

   Svar: Gränsvärdet är 1/3.

   (c) Gränsvärde av typ $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   $$\frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x+x^2)} = \frac{\ln x^3(1+\frac{1}{x^3})}{\ln x^2(1+\frac{1}{x})} = \frac{3\ln x + \ln(1+\frac{1}{x^3})}{2\ln x + \ln(1+\frac{1}{x})} = \frac{3 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^3})}{\ln x}}{2 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}} \to \frac{3}{2} \text{ då } x \to \infty.$$

   Svar: Gränsvärdet är 3/2.

3. (a) $\displaystyle\int x \ln x \, dx = $/partiell integration/$\displaystyle= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

   Svar: Exempelvis $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}\, dx = /\frac{x+3}{x^2+4+5} = \frac{x+3}{(x+2)^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1} + \frac{1}{(x+2)^2+1}/ = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1}\, dx + \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) + \arctan(x+2) + C$

   Svar: Exempelvis $\dfrac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) + \arctan(x+2)$.

(c) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 5\sin x + 6}\,dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x + 5\sin x + 6}\,dx = /t = \sin x, dt = \cos x dx/ = \int \frac{2t}{t^2+5t+6}\,dt = \int \frac{6}{t+3}\,dt - \int \frac{4}{t+2}\,dt = 6\ln|t+3| - 4\ln|t+2| + C = 6\ln(3+\sin x) - 4\ln(2+\sin x) + C.$ Svar: Exempelvis $6\ln(3+\sin x) - 4\ln(2+\sin x)$.

4. Sätt $f(x) = \ln(1+2x) - 2x + 2x^2$ då $x \geq 0$. Eftersom $f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 2 + 4x = \frac{8x^2}{1+2x} > 0$, då $x > 0$, är f strängt växande och då $f(0) = 0$ följer att $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+2x) \geq 2x - 2x^2$ för alla $x \geq 0$.

5. (a) f är strängt växande om $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

   (b) Notera att $g(x) = x$ om $x \leq 0$ och att $g(x) = 3x$ om $x \geq 0$.
   Om $x < y \leq 0$ gäller att $0 < y - x = g(y) - g(x) \Rightarrow g(x) < g(y)$.
   Om $x < 0 < y$ gäller att $0 < 3y - x = g(y) - g(x) \Rightarrow g(x) < g(y)$.
   Och om $0 \leq x < y$ gäller att $0 < 3y - 3x = g(y) - g(x) \Rightarrow g(x) < g(y)$.
   Sammantaget visar detta att g är strängt växande.

   (c) Sätt $f_1(x) = f_2(x) = x$. Då är både f_1 och f_2 strängt växande men $h(x) = x^2$ är det inte.

6. Låt h vara höjden och d vara diametern. Då gäller att $V = \frac{\pi d^2 h}{4} \Leftrightarrow h = \frac{4V}{\pi d^2}$ och begränsningsarean $A(d) = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} + \pi d h = \frac{\pi d^2}{2} + \frac{4V}{d} \to \infty$ då $d \to 0+$ eller $d \to \infty$. $A'(d) = \pi d - \frac{4V}{d^2} = \frac{\pi d^3 - 4V}{d^2} = 0 \Leftrightarrow d = (\frac{4V}{\pi})^{1/3}$. Gränsvärdena avslöjar att detta ger den minsta begränsningsarean. För $d^3 = \frac{4V}{\pi}$ fås att $\frac{h}{d} = \frac{4V}{\pi d^3} = 1$.
Svar: Förhållandet är 1.

7. $\int_\epsilon^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = /\text{PI}/ = [-x\cot x]_\epsilon^{\pi/2} + \int_\epsilon^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \frac{\epsilon\cos\epsilon}{\sin\epsilon} + [\ln\sin x]_\epsilon^{\pi/2} = \frac{\epsilon}{\sin\epsilon} \cdot \cos\epsilon - \ln\sin\epsilon \to 1 \cdot 1 + \infty = \infty$ då $\epsilon \to 0+$. Integralen är således divergent.

$\int_\epsilon^{\pi/2} (\frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x})\,dx = \frac{\epsilon}{\sin\epsilon} \cdot \cos\epsilon - \ln\sin\epsilon - [\ln x]_\epsilon^{\pi/2} = \frac{\epsilon}{\sin\epsilon} \cdot \cos\epsilon + \ln\frac{\epsilon}{\sin\epsilon} - \ln\frac{\pi}{2} \to 1 + \ln 1 - \ln\frac{\pi}{2} = 1 - \ln\frac{\pi}{2}$ då $\epsilon \to 0+$. Svar: $\int_0^{\pi/2} (\frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x})\,dx = 1 - \ln\frac{\pi}{2}$.