Envariabelanalys 1, TATA41, 2008-06-03, lösningsförslag

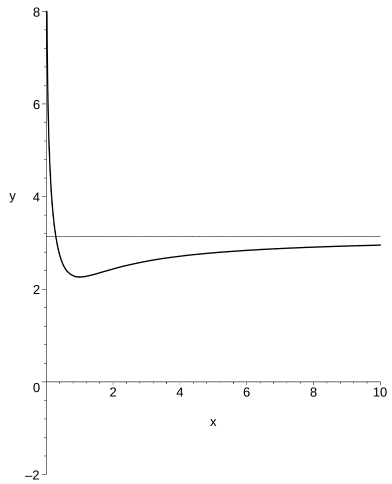
1. $f(x) = 2\arctan x - 2\ln x + \ln(1+x^2)$ är definierad då $x > 0$. $f(x) \to \infty$ då $x \to 0+$ och $f(x) = 2\arctan x + \ln(\dfrac{1}{x^2} + 1) \to \pi$ då $x \to \infty$. Således är $x = 0$ en lodrät aymptot och $y = \pi$ en vågrät asymptot.

   Vidare gäller att $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2(x-1)}{x(1+x^2)} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

   Teckenschemat

x	0		1	
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nexists$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

   visar att $f(1) = \dfrac{\pi}{2} + \ln 2$ är ett min, och vi får följande graf.



2. (a) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

   $\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+4x)} = \dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot \dfrac{4x}{\ln(1+4x)} \cdot \dfrac{3}{4} \to 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{3}{4} = 3/4$ då $x \to 0$ enligt standardgränsvärden.

   Svar: Gränsvärdet är $3/4$.

   (b) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

   $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \to 1/2$ då $x \to 1$.

   Svar: Gränsvärdet är $1/2$.

   (c) Gränsvärde av typ $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   $\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^{1+\ln x}} = \dfrac{x + \ln(e^{-x}+1)}{e \cdot x} = \dfrac{1 + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}}{e} \to \dfrac{1+0}{e} = \dfrac{1}{e}$ då $x \to \infty$.

   Svar: Gränsvärdet är $\dfrac{1}{e}$.

3. (a) $\int (x+1)e^{2x}\ dx =$/partiell integration/$= (x+1)\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\ dx =$

$= (x+1)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$ Svar: Exempelvis $(\frac{x}{2}+\frac{1}{4})e^{2x}$.

(b) $\int \cos^3 x\ dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\ dx = \int \cos x\ dx - \int \sin^2 x \cos x\ dx =$

$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$ Svar: Exempelvis $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$.

(c) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}}\ dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ dx = 2tdt/ = \int \frac{2t}{t^3+t^2-2t}\ dt =$

$/\frac{2t}{t^3+t^2-2t} = \frac{2}{(t+2)(t-1)} = \frac{2}{3}(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+2})/ = \frac{2}{3}(\int \frac{1}{t-1}\ dt - \int \frac{1}{t+2}\ dt) =$

$\frac{2}{3}(\ln|t-1| - \ln|t+2|) + C = \frac{2}{3}\ln|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}| + C.$ Svar: Exempelvis $\frac{2}{3}\ln|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}|$.

4. $f(x) = (2x-3)e^{-1/x^2} \to 0$ då $x \to 0+$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$.

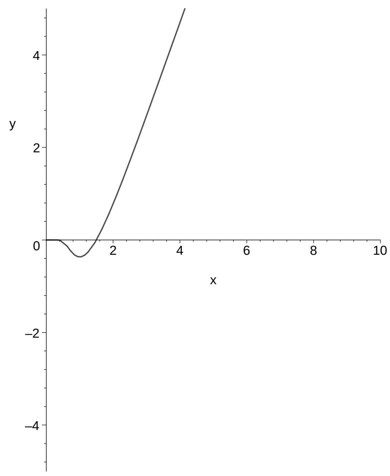
$f'(x) = (2 + \frac{2(2x-3)}{x^3})e^{-1/x^2} = 2e^{-1/x^2}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{x^3} =$

$2e^{-1/x^2}\frac{(x-1)((x+1/2)^2+11/4)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Teckenschemat

x	0		1	
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nexists$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

visar att $f(1) = -1/e$ är funktionens minsta värde. Således får vi följande graf



Svar: Lösningar saknas då $a < -1/e$, det finns en lösning då $a = -1/e$ eller $a \geq 0$, det finns två lösningar då $-\frac{1}{e} < a < 0$.

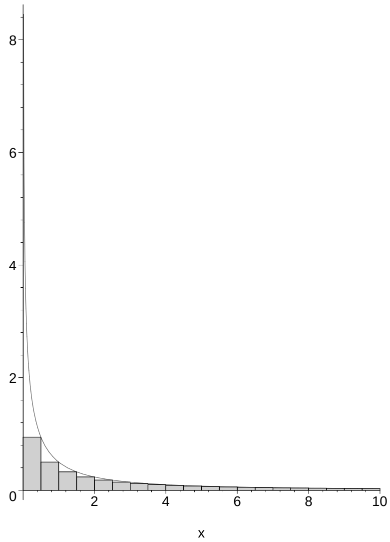
5. (a) Se boken.

   (b) Enligt medelvärdessatsen finns $x \in]0, \pi/2[$ sådan att $f'(x) = \dfrac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2} =$

   $= \dfrac{\pi/2}{\pi/2} = 1$, vsv.

   (c) Sätt $f(x) = g(x) - x$. Då gäller $f(a) = f(b) = f(c) = 2$ och enligt medelvärdessatsen finns $\xi_1 \in]a, b[$ och $\xi_2 \in]b, c[$ sådana att $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Medelvärdessatsen ännu en gång visar att det finns $x \in]\xi_1, \xi_2[\subset]a, c[$ sådan att
   $f''(x) = \dfrac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = 0$, vsv.

6. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ är positiv och avtagande för $x > 0$ och $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dx =$
$= /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2, t > 0, dx = 2tdt/ = \displaystyle\int \frac{2}{t^2+1}\, dt = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} +$
C. En enkel figur, i stil med nedanstående



visar att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \int_0^n \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dx = 2\arctan n < \pi$.

Då termerna i summan är positiva följer att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2}$ för alla $n \geq 1$. Således gäller exempelvis att $1/4 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \pi$ för alla $n \geq 1$.

7. Låt P ha koordinaterna (x, e^x) och Q ha koordinaterna (t, t). Då gäller att avståndet i kvadrat mellan P och Q är $A(x,t) = (x-t)^2 + (e^x - t)^2 = 2(t - \dfrac{x+e^x}{2})^2 + x^2 + e^{2x} -$
$\dfrac{(x+e^x)^2}{2} = 2(t - \dfrac{x+e^x}{2})^2 + \dfrac{(e^x - x)^2}{2}$.

För fixt x blir minsta värdet av avståndet i kvadrat $A(x, \dfrac{e^x + x}{2}) = \dfrac{(e^x - x)^2}{2}$.

$D\dfrac{(e^x - x)^2}{2} = (e^x - x)(e^x - 1)$. Vidare gäller att $D(e^x - x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ och en enkel teckenundersökning visar att $e^0 - 0 = 1$ är minsta värdet av $e^x - x$. Härav följer att $D\dfrac{(e^x - x)^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ och väsentligen samma teckenundersökning som ovan visar att $1/2$ är minsta värdet av $\dfrac{(e^x - x)^2}{2}$. Således är $\sqrt{A(0, 1/2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ minsta avståndet.

Svar: $1/\sqrt{2}$.