Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 1 (TATA41)

2008–06–03 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 2\arctan x - 2\ln x + \ln(1+x^2)$. Alla lokala maxima och minima samt lodräta och vågräta asymptoter måste framgå, om sådana finns.

2. Undersök
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+4x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^{1+\ln x}}$.

3. Bestäm en primitiv funktion till
   (a) $(x+1)e^{2x}$ (b) $\cos^3 x$ (c) $\displaystyle\frac{1}{x\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}}$.

4. Låt $f(x) = (2x-3)e^{-1/x^2}$, $x > 0$. Bestäm, för varje reellt tal a, antalet olika lösningar till ekvationen $f(x) = a$.

5. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator.
   (b) Låt $f(x) = x\sin x$. Visa att det finns något $x \in \left]0\,, \frac{\pi}{2}\right[$ sådant att $f'(x) = 1$.
   (c) Punkterna $a < b < c$ är givna. Funktionen g är deriverbar två gånger på intervallet $[a, c]$ och $g(a) = a + 2$, $g(b) = b + 2$ och $g(c) = c + 2$. Visa att det finns något $x \in]a, c[$ sådant att $g''(x) = 0$.

6. Bestäm positiva konstanter c och C sådana att
   $$c < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < C$$
   för alla heltal $n \geq 1$.

7. Betrakta punkter P på kurvan $y = e^x$ och punkter Q på linjen $y = x$. Bestäm minsta möjliga avstånd mellan P och Q.