Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 1 (TATA41)

2008–06–03 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 2\arctan x - 2\ln x + \ln(1+x^2)$. Alla lokala maxima och minima samt lodräta och vågräta asymptoter måste framgå, om sådana finns.

2. Undersök
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+4x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^{1+\ln x}}$.

3. Bestäm en primitiv funktion till
   (a) $(x+1)e^{2x}$ (b) $\cos^3 x$ (c) $\displaystyle\frac{1}{x\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}}$.

4. Låt $f(x) = (2x-3)e^{-1/x^2}$, $x > 0$. Bestäm, för varje reellt tal a, antalet olika lösningar till ekvationen $f(x) = a$.

5. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator.
   (b) Låt $f(x) = x\sin x$. Visa att det finns något $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ sådant att $f'(x) = 1$.
   (c) Punkterna $a < b < c$ är givna. Funktionen g är deriverbar två gånger på intervallet $[a, c]$ och $g(a) = a + 2$, $g(b) = b + 2$ och $g(c) = c + 2$. Visa att det finns något $x \in]a, c[$ sådant att $g''(x) = 0$.

6. Bestäm positiva konstanter c och C sådana att
$$c < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < C$$
   för alla heltal $n \geq 1$.

7. Betrakta punkter P på kurvan $y = e^x$ och punkter Q på linjen $y = x$. Bestäm minsta möjliga avstånd mellan P och Q.

Envariabelanalys 1, TATA41, 2008-06-03, lösningsförslag

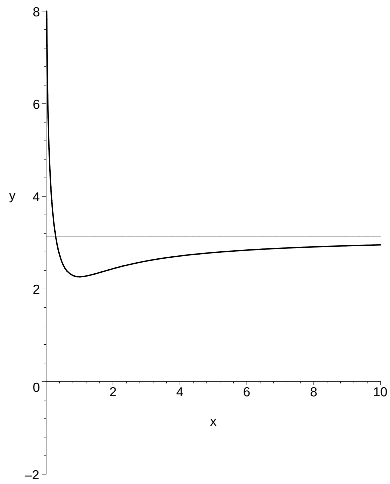
1. $f(x) = 2\arctan x - 2\ln x + \ln(1+x^2)$ är definierad då $x > 0$. $f(x) \to \infty$ då $x \to 0+$ och $f(x) = 2\arctan x + \ln(\dfrac{1}{x^2} + 1) \to \pi$ då $x \to \infty$. Således är $x = 0$ en lodrät aymptot och $y = \pi$ en vågrät asymptot.

   Vidare gäller att $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2(x-1)}{x(1+x^2)} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

   Teckenschemat

x	0		1	
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nexists$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

   visar att $f(1) = \dfrac{\pi}{2} + \ln 2$ är ett min, och vi får följande graf.



2. (a) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

   $\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+4x)} = \dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot \dfrac{4x}{\ln(1+4x)} \cdot \dfrac{3}{4} \to 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{3}{4} = 3/4$ då $x \to 0$ enligt standardgränsvärden.

   Svar: Gränsvärdet är $3/4$.

   (b) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

   $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \to 1/2$ då $x \to 1$.

   Svar: Gränsvärdet är $1/2$.

   (c) Gränsvärde av typ$\dfrac{\infty}{\infty}$.

   $\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^{1+\ln x}} = \dfrac{x + \ln(e^{-x}+1)}{e \cdot x} = \dfrac{1 + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}}{e} \to \dfrac{1+0}{e} = \dfrac{1}{e}$ då $x \to \infty$.

   Svar: Gränsvärdet är $\dfrac{1}{e}$.

3. (a) $\displaystyle\int (x+1)e^{2x}\,dx = /\text{partiell integration}/ = (x+1)\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx =$

$\displaystyle = (x+1)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$ Svar: Exempelvis $\displaystyle(\frac{x}{2}+\frac{1}{4})e^{2x}.$

(b) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int \cos x\,dx - \int \sin^2 x \cos x\,dx =$

$\displaystyle = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$ Svar: Exempelvis $\displaystyle\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}.$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}}\,dx = /t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2,\ dx=2t\,dt/ = \int \frac{2t}{t^3+t^2-2t}\,dt =$

$\displaystyle /\frac{2t}{t^3+t^2-2t} = \frac{2}{(t+2)(t-1)} = \frac{2}{3}(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+2})/ = \frac{2}{3}(\int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t+2}\,dt) =$

$\displaystyle \frac{2}{3}(\ln|t-1|-\ln|t+2|)+C = \frac{2}{3}\ln|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}|+C.$ Svar: Exempelvis $\displaystyle\frac{2}{3}\ln|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}|.$

4. $f(x) = (2x-3)e^{-1/x^2} \to 0$ då $x \to 0+$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$.

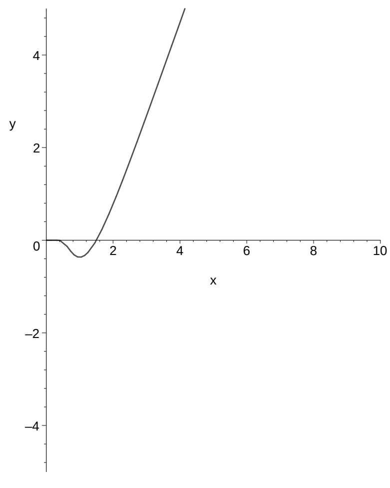
$\displaystyle f'(x) = (2+\frac{2(2x-3)}{x^3})e^{-1/x^2} = 2e^{-1/x^2}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{x^3} =$

$\displaystyle 2e^{-1/x^2}\frac{(x-1)((x+1/2)^2+11/4)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Teckenschemat

x	0		1	
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nexists$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

visar att $f(1) = -1/e$ är funktionens minsta värde. Således får vi följande graf



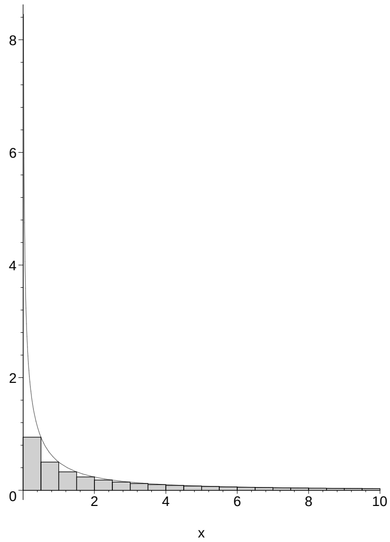
Svar: Lösningar saknas då $a < -1/e$, det finns en lösning då $a = -1/e$ eller $a \geq 0$, det finns två lösningar då $\displaystyle -\frac{1}{e} < a < 0$.

5. (a) Se boken.

   (b) Enligt medelvärdessatsen finns $x \in]0, \pi/2[$ sådan att $f'(x) = \dfrac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2} =$
   $= \dfrac{\pi/2}{\pi/2} = 1$, vsv.

   (c) Sätt $f(x) = g(x) - x$. Då gäller $f(a) = f(b) = f(c) = 2$ och enligt medelvärdessatsen finns $\xi_1 \in]a, b[$ och $\xi_2 \in]b, c[$ sådana att $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Medelvärdessatsen ännu en gång visar att det finns $x \in]\xi_1, \xi_2[\subset]a, c[$ sådan att
   $f''(x) = \dfrac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = 0$, vsv.

6. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ är positiv och avtagande för $x > 0$ och $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx =$
$= /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2, t > 0, dx = 2tdt/ = \displaystyle\int \frac{2}{t^2+1}\,dt = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} +$
C. En enkel figur, i stil med nedanstående



visar att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \int_0^n \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = 2\arctan n < \pi$.

Då termerna i summan är positiva följer att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2}$ för alla $n \geq 1$. Således gäller exempelvis att $1/4 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \pi$ för alla $n \geq 1$.

7. Låt P ha koordinaterna (x, e^x) och Q ha koordinaterna (t, t). Då gäller att avståndet i kvadrat mellan P och Q är $A(x,t) = (x-t)^2 + (e^x - t)^2 = 2(t - \dfrac{x+e^x}{2})^2 + x^2 + e^{2x} - \dfrac{(x+e^x)^2}{2} = 2(t - \dfrac{x+e^x}{2})^2 + \dfrac{(e^x - x)^2}{2}$.

För fixt x blir minsta värdet av avståndet i kvadrat $A(x, \dfrac{e^x + x}{2}) = \dfrac{(e^x - x)^2}{2}$.

$D\dfrac{(e^x - x)^2}{2} = (e^x - x)(e^x - 1)$. Vidare gäller att $D(e^x - x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ och en enkel teckenundersökning visar att $e^0 - 0 = 1$ är minsta värdet av $e^x - x$. Härav följer att $D\dfrac{(e^x - x)^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ och väsentligen samma teckenundersökning som ovan visar att $1/2$ är minsta värdet av $\dfrac{(e^x - x)^2}{2}$. Således är $\sqrt{A(0, 1/2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ minsta avståndet.

Svar: $1/\sqrt{2}$.