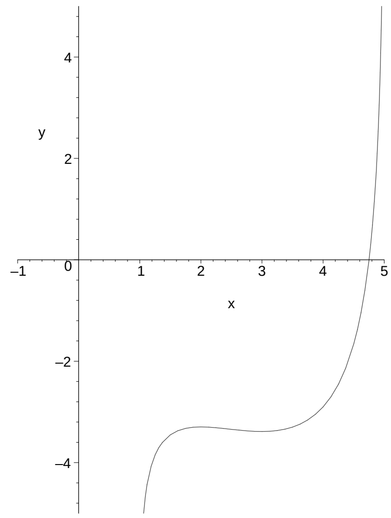
Envariabelanalys 1, TATA41, 2008-03-27, lösningsförslag

1. Funktionen är definierad då $x-1>0$ och $5-x>0$, dvs då $1<x<5$. För dessa x fås $f'(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{5-x} - 2 = \dfrac{2x^2-10x+12}{(x-1)(5-x)} = \dfrac{2(x-2)(x-3)}{(x-1)(5-x)}$. Detta ger teckentabellen

x	1		2		3		5
$f'(x)$	ξ	$+$	0	$-$	0	$+$	ξ
$f(x)$	ξ	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	ξ

Eftersom $f(2) = -3\ln 3 < 0$ så följer av teckentabellen att även $f(3) < 0$. Dessutom gäller att $f(x) \to \infty$ då $x \to 5^-$, och sålunda får vi följande principfigur:



och där framgår att f har ett reellt nollställe.

Svar: f har ett reellt nollställe.

2. (a) $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)\cdot \ln x}{x}\,dx = \Big/ t=\ln x\ ,\ dt = \frac{\ln x}{x} \Big/ = \int t\sin t\,dt =$

$\displaystyle = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t + C = -\cos(\ln x)\cdot \ln x + \sin(\ln x) + C$

Svar: T.ex. $\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\cdot \ln x$.

(b) $\displaystyle\int \cos^2(3x)\,dx = \int \frac{1+\cos(6x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(6x)}{12} + C$

Svar: T.ex. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(6x)}{12}$.

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+20}\,dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+16}\,dx = \int \frac{x}{16\left(1+\left(\frac{x+2}{4}\right)\right)}\,dx =$

$\displaystyle = \Big/ t = \frac{x+2}{4}\ ,\ dx = 4\,dt \Big/ = \int \frac{2t-1}{2(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \frac{1}{2}\arctan t + C =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{x+2}{4}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{4} + C$

Svar: T.ex. $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\left(\dfrac{x+2}{4}\right)^2\right) - \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x+2}{4}$.

3. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+5x)}{\sin^2(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{5x} \cdot \left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} = 1 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

Svar: $\frac{5}{4}$.

(b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+\sin x} = \Big/ t=-x\ ,\ t\to\infty \Big/ = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t^2+t}}{-t-\sin t} = \lim_{t\to\infty} \frac{|t|\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{-t-\sin t} =$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{t\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{t\left(-1-\frac{\sin t}{t}\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{-1-\frac{\sin t}{t}} = \Big/ \frac{\sin t}{t} \to 0 \text{ ty } \sin t \text{ är begr.} \Big/ = -1$

Svar: -1.

(c) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^4+3x}-\sqrt{x^4-2x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left((x^4+3x)-(x^4-2x)\right)}{\sqrt{x^4+3x}+\sqrt{x^4-2x}} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{x^2\left(\sqrt{1+3/x^3}+\sqrt{1-2/x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1+3/x^3}+\sqrt{1-2/x^3}} = \frac{5}{2}$

Svar: $\frac{5}{2}$.

4. $U(a) = \int_1^a \frac{\pi}{x(x+1)^2}\,dx = /\text{partialbråk}/ = \pi(\int_1^a \frac{1}{x}\,dx - \int_1^a \frac{1}{x+1}\,dx - \int_1^a \frac{1}{(x+1)^2}\,dx) =$ $\pi[\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}]_1^a = \pi(\ln\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} - (-\ln 2 + \frac{1}{2})) = \pi(\ln\frac{1}{1+1/a} + \frac{1}{a+1} +$ $\ln 2 - 1/2) \to \pi(\ln 2 - 1/2)$ då $a\to\infty$.

$V(a) = \int_1^a \frac{2\pi\sqrt{x}}{x+1}\,dx = /t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2,\ t\ge 0,\ dx = 2tdt/ = 4\pi\int_1^{\sqrt{a}} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt =$ $4\pi\int_1^{\sqrt{a}} (1-\frac{1}{t^2+1})\,dt = 4\pi[t-\arctan t]_1^{\sqrt{a}} = 4\pi(\sqrt{a}-\arctan\sqrt{a}-1+\pi/4) \to \infty$ då $a\to\infty$.

Svar: $U(a) = \pi(\ln\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} + \ln 2 - 1/2)$, $V(a) = 4\pi(\sqrt{a}-\arctan\sqrt{a}-1+\pi/4)$ och endast $U(a)$ har ändligt gränsvärde.

5. (a) Se Sats 4.1 i boken på sid 180.

(b) $f(x)-16 = \frac{f(x)-16}{x-3}\cdot(x-3) \to 2\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow f(x)\to 16$ då $x\to 3$. Således gäller att $\lim_{x\to 3} f(x) = 16$.

$\frac{\sqrt{f(x)}-4}{x-3} = \frac{f(x)-16}{x-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}+4} \to 2\cdot\frac{1}{4+4} = 1/4$ då $x\to 3$.

Svar: $\lim_{x\to 3} f(x) = 16$ och $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{f(x)}-4}{x-3} = 1/4$.

6. Låt kateterna ha längden a resp b. Eftersom kateterna är mindre än hypotenusan och omkretsen är 2, gäller att $0<a<1$ och $0<b<1$. Hypotenusan är $\sqrt{a^2+b^2}$ och vi får ekvationen $a+b+\sqrt{a^2+b^2} = 2 \Leftrightarrow /0<a+b<2/ \Leftrightarrow a^2+b^2 = (2-(a+b))^2 \Leftrightarrow$ $0 = 4-4a-4b+2ab \Leftrightarrow b = \frac{2-2a}{2-a}$.

Triangelarean är $T(a) = \frac{ab}{2} = \frac{a(1-a)}{2-a} = a+1+\frac{2}{a-2}$ och derivatan $T'(a) = 1 - \frac{2}{(a-2)^2} = \frac{(a-2+\sqrt{2})(a-2-\sqrt{2})}{(a-2)^2}$ har endast nollstället $a = 2-\sqrt{2}$ i intervallet $]0,1[$. En enkel teckenstudie visar att $T(2-\sqrt{2}) = 3-\sqrt{2}-\sqrt{2} = 3-2\sqrt{2}$ är triangelareans största värde.

Svar: Största värdet är $3-2\sqrt{2}$.

7. Eftersom $f(x)-x = /x\ne 0/ = x(\frac{f(x)}{x}-1)$ och $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ finns $b>0$ sådan att $f(b)-b<0$ och $a<0$ sådan att $f(a)-a>0$. Satsen om mellanliggande värden visar att $f(x)-x=0 \Leftrightarrow f(x)=x$ för minst ett $x\in]a,b[$.