Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 1 (TATA41)

2008–03–27 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Låt $f(x) = \ln(x-1) - 3\ln(5-x) - 2x + 4$. Ange f:s definitionsmängd och bestäm antalet reella nollställen till f.

2. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{\sin(\ln x)\cdot \ln x}{x}$ (b) $\cos^2(3x)$ (c) $\dfrac{x}{x^2+4x+20}$

3. Bestäm följande gränsvärden.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+5x)}{\sin^2(2x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+\sin x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^4+3x}-\sqrt{x^4-2x}\right)$

4. $U(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{\pi}{x(x+1)^2}\,dx$ och $V(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{2\pi\sqrt{x}}{x+1}\,dx$ anger volymen av de båda kroppar som fås då området $D_a = \left\{1 \le x \le a\ ,\ 0 \le y \le \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\right\}$ roteras kring x- respektive y-axeln. Beräkna $U(a)$ och $V(a)$ och visa att exakt en av dem har ändligt gränsvärde då $a \to \infty$.

5. (a) Visa att om f är deriverbar så är f kontinuerlig. (1p)

   (b) Antag att $f(3)$ inte existerar, men att $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-16}{x-3} = 2$. Vad kan sägas om $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$ och $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{f(x)}-4}{x-3}$? (2p)

6. Bestäm den största möjliga arean av en rätvinklig triangel med omkrets 2 l.e.

7. Funktionen f är kontinuerlig för alla reella x och $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$. Visa att ekvationen $f(x) = x$ har minst en lösning.