Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 1 (TATA41)

2008–03–27 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Låt $f(x) = \ln(x-1) - 3\ln(5-x) - 2x + 4$. Ange f:s definitionsmängd och bestäm antalet reella nollställen till f.

2. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $\dfrac{\sin(\ln x)\cdot \ln x}{x}$ (b) $\cos^2(3x)$ (c) $\dfrac{x}{x^2+4x+20}$

3. Bestäm följande gränsvärden.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+5x)}{\sin^2(2x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x+\sin x}$ (c) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\sqrt{x^4+3x} - \sqrt{x^4-2x}\right)$

4. $U(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{\pi}{x(x+1)^2}\,dx$ och $V(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{2\pi\sqrt{x}}{x+1}\,dx$ anger volymen av de båda kroppar som fås då området $D_a = \left\{1 \le x \le a\ ,\ 0 \le y \le \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\right\}$ roteras kring x- respektive y-axeln. Beräkna $U(a)$ och $V(a)$ och visa att exakt en av dem har ändligt gränsvärde då $a \to \infty$.

5. (a) Visa att om f är deriverbar så är f kontinuerlig. (1p)

   (b) Antag att $f(3)$ inte existerar, men att $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-16}{x-3} = 2$. Vad kan sägas om $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ och $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{f(x)}-4}{x-3}$? (2p)

6. Bestäm den största möjliga arean av en rätvinklig triangel med omkrets 2 l.e.

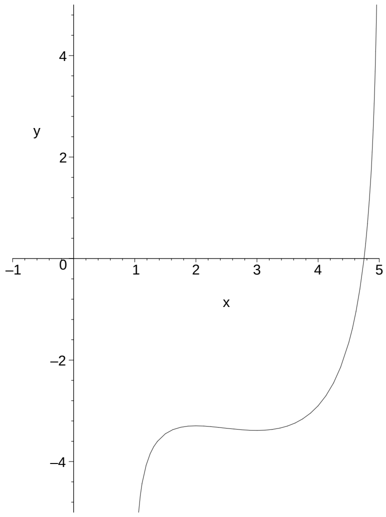
7. Funktionen f är kontinuerlig för alla reella x och $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Visa att ekvationen $f(x) = x$ har minst en lösning.

Envariabelanalys 1, TATA41, 2008-03-27, lösningsförslag

1. Funktionen är definierad då $x-1>0$ och $5-x>0$, dvs då $1<x<5$. För dessa x fås $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{5-x}-2=\dfrac{2x^2-10x+12}{(x-1)(5-x)}=\dfrac{2(x-2)(x-3)}{(x-1)(5-x)}$. Detta ger teckentabellen

x	1		2		3		5
$f'(x)$	ξ	$+$	0	$-$	0	$+$	ξ
$f(x)$	ξ	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	ξ

Eftersom $f(2)=-3\ln 3<0$ så följer av teckentabellen att även $f(3)<0$. Dessutom gäller att $f(x)\to\infty$ då $x\to 5^-$, och sålunda får vi följande principfigur:



och där framgår att f har ett reellt nollställe.

Svar: f har ett reellt nollställe.

2. (a) $$\int \frac{\sin(\ln x)\cdot \ln x}{x}\,dx = \Big/ t=\ln x\ ,\ dt=\frac{\ln x}{x} \Big/ = \int t\sin t\,dt =$$
$$= -t\cos t+\int \cos t\,dt = -t\cos t+\sin t + C = -\cos(\ln x)\cdot\ln x+\sin(\ln x)+C$$

Svar: T.ex. $\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\cdot\ln x$.

(b) $$\int \cos^2(3x)\,dx=\int\frac{1+\cos(6x)}{2}\,dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin(6x)}{12}+C$$

Svar: T.ex. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin(6x)}{12}$.

(c) $$\int\frac{x}{x^2+4x+20}\,dx=\int\frac{x}{(x+2)^2+16}\,dx=\int\frac{x}{16\left(1+\left(\frac{x+2}{4}\right)\right)}\,dx=$$
$$=\Big/ t=\frac{x+2}{4}\ ,\ dx=4\,dt\Big/=\int\frac{2t-1}{2(1+t^2)}\,dt=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\frac{1}{2}\arctan t+C=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{x+2}{4}\right)^2\right)-\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{4}+C$$

Svar: T.ex. $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\left(\dfrac{x+2}{4}\right)^2\right)-\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x+2}{4}$.

3. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+5x)}{\sin^2(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{5x} \cdot \left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} = 1 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

Svar: $\frac{5}{4}$.

(b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+\sin x} = \Big/ t = -x\ ,\ t\to\infty \Big/ = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t^2+t}}{-t-\sin t} = \lim_{t\to\infty} \frac{|t|\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{-t-\sin t} =$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{t\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{t\left(-1-\frac{\sin t}{t}\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{-1-\frac{\sin t}{t}} = \Big/ \frac{\sin t}{t} \to 0 \text{ ty } \sin t \text{ är begr.} \Big/ = -1$

Svar: -1.

(c) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^4+3x} - \sqrt{x^4-2x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left((x^4+3x)-(x^4-2x)\right)}{\sqrt{x^4+3x}+\sqrt{x^4-2x}} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{x^2\left(\sqrt{1+3/x^3}+\sqrt{1-2/x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1+3/x^3}+\sqrt{1-2/x^3}} = \frac{5}{2}$

Svar: $\frac{5}{2}$.

4. $U(a) = \int_1^a \frac{\pi}{x(x+1)^2}\,dx = /\text{partialbråk}/ = \pi\left(\int_1^a \frac{1}{x}\,dx - \int_1^a \frac{1}{x+1}\,dx - \int_1^a \frac{1}{(x+1)^2}\,dx\right) =$ $\pi[\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}]_1^a = \pi(\ln\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} - (-\ln 2 + \frac{1}{2})) = \pi(\ln\frac{1}{1+1/a} + \frac{1}{a+1} +$ $\ln 2 - 1/2) \to \pi(\ln 2 - 1/2)$ då $a\to\infty$.

$V(a) = \int_1^a \frac{2\pi\sqrt{x}}{x+1}\,dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t\geq 0,\ dx = 2tdt/ = 4\pi\int_1^{\sqrt{a}} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt =$ $4\pi\int_1^{\sqrt{a}} (1 - \frac{1}{t^2+1})\,dt = 4\pi[t - \arctan t]_1^{\sqrt{a}} = 4\pi(\sqrt{a} - \arctan\sqrt{a} - 1 + \pi/4) \to \infty$ då $a\to\infty$.

Svar: $U(a) = \pi(\ln\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} + \ln 2 - 1/2)$, $V(a) = 4\pi(\sqrt{a} - \arctan\sqrt{a} - 1 + \pi/4)$ och endast $U(a)$ har ändligt gränsvärde.

5. (a) Se Sats 4.1 i boken på sid 180.

(b) $f(x) - 16 = \frac{f(x)-16}{x-3}\cdot(x-3) \to 2\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow f(x) \to 16$ då $x\to 3$. Således gäller att $\lim_{x\to 3} f(x) = 16$.

$\frac{\sqrt{f(x)}-4}{x-3} = \frac{f(x)-16}{x-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}+4} \to 2\cdot\frac{1}{4+4} = 1/4$ då $x\to 3$.

Svar: $\lim_{x\to 3} f(x) = 16$ och $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{f(x)}-4}{x-3} = 1/4$.

6. Låt kateterna ha längden a resp b. Eftersom kateterna är mindre än hypotenusan och omkretsen är 2, gäller att $0 < a < 1$ och $0 < b < 1$. Hypotenusan är $\sqrt{a^2+b^2}$ och vi får ekvationen $a + b + \sqrt{a^2+b^2} = 2 \Leftrightarrow /0 < a+b < 2/ \Leftrightarrow a^2+b^2 = (2-(a+b))^2 \Leftrightarrow$ $0 = 4 - 4a - 4b + 2ab \Leftrightarrow b = \frac{2-2a}{2-a}$.

Triangelarean är $T(a) = \frac{ab}{2} = \frac{a(1-a)}{2-a} = a + 1 + \frac{2}{a-2}$ och derivatan $T'(a) = 1 - \frac{2}{(a-2)^2} = \frac{(a-2+\sqrt{2})(a-2-\sqrt{2})}{(a-2)^2}$ har endast nollstället $a = 2-\sqrt{2}$ i intervallet $]0,1[$. En enkel teckenstudie visar att $T(2-\sqrt{2}) = 3-\sqrt{2}-\sqrt{2} = 3-2\sqrt{2}$ är triangelareans största värde.

Svar: Största värdet är $3-2\sqrt{2}$.

7. Eftersom $f(x) - x = /x\neq 0/ = x(\frac{f(x)}{x} - 1)$ och $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ finns $b > 0$ sådan att $f(b) - b < 0$ och $a < 0$ sådan att $f(a) - a > 0$. Satsen om mellanliggande värden visar att $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ för minst ett $x \in]a,b[$.