Envariabelanalys 1, TATA41, 2008-03-10, lösningsförslag

1. $f(x) = \ln(2x+4) - 2\arctan x$ är definierad då $2x+4>0 \Leftrightarrow x>-2$. Eftersom $f(x) \to -\infty$ då $x \to -2+$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ är $x=-2$ en lodrät aymptot medan vågrät asymptot saknas.

   Vidare gäller att $f'(x) = \dfrac{2}{2x+4} - \dfrac{2}{1+x^2} = \dfrac{2x^2-4x-6}{(2x+4)(x^2+1)} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x^2+1)} = 0 \Leftrightarrow x=-1$ eller $x=3$.

   Teckenschemat

x	-2		-1		3	
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nexists$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

   visar att $f(-1)$ är ett lokalt max medan $f(3)$ är ett lokalt min.

2. (a) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

   $\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)} = \dfrac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \dfrac{3x}{\ln(1+3x)} \cdot \dfrac{2}{3} \to 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{2}{3} = 2/3$ då $x \to 0$ enligt standardgränsvärden. Svar: Gränsvärdet är $2/3$.

   (b) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.

   $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x-12} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-4)} = \dfrac{x-1}{x-4} \to 4/7$ då $x \to -3$. Svar: Gränsvärdet är $4/7$.

   (c) Gränsvärde av typ$\dfrac{\infty}{\infty}$.

   $\dfrac{x-\sin(e^x)}{4\ln x - 3e^{1+\ln x}} = \dfrac{x-\sin(e^x)}{4\ln x - 3ex} = \dfrac{1-\frac{\sin(e^x)}{x}}{\frac{4\ln x}{x} - 3e} \to \dfrac{1-0}{0-3e} = -\dfrac{1}{3e}$, då $x \to \infty$, pga hastighetstabellen och att $\sin t$ är begränsad. Svar: Gränsvärdet är $-\dfrac{1}{3e}$.

3. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx = /t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2,\ t\geq 0,\ \frac{dx}{dt}=2t \Leftrightarrow dx = 2t dt/ = \int \frac{2t}{t-1}\,dt = \int (2+\frac{2}{t-1})\,dt = 2t + 2\ln|t-1| + C = 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}-1)^2 + C.$ Svar: Exempelvis $2(\sqrt{x}+\ln|\sqrt{x}-1|)$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\,dx =$/partialbråksuppdelning/$= \displaystyle\int (-\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-1})\,dx = -\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + C.$ Svar: Exempelvis $2\ln|x-1| - \ln|x+3|$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{6x-9x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}\,dx = /t=3x-1 \Leftrightarrow x = \frac{t+1}{3},\ dx = \frac{1}{3}dt/ = \frac{1}{9}\int \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{9}(-\int \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt) = \frac{1}{9}(-\sqrt{1-t^2} + \arcsin t) + C = \frac{1}{9}(-\sqrt{1-(3x-1)^2} + \arcsin(3x-1)) + C.$ Svar: Exempelvis $\dfrac{1}{9}(\arcsin(3x-1) - \sqrt{6x-9x^2})$.

4. $\displaystyle\int_1^b \frac{\ln(1+1/x)}{\sqrt{x}}\ dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0,\ dx = 2tdt/ = \int_1^{\sqrt{b}} 2\ln(1+1/t^2)\ dt =$/ partiell integration $/ = 2([t\ln(1+1/t^2)]_1^{\sqrt{b}} - \int_1^{\sqrt{b}} \frac{t}{1+1/t^2}\cdot\frac{-2}{t^3}\ dt) = 2([t\ln(1+\frac{1}{t^2})]_1^{\sqrt{b}} + \int_1^{\sqrt{b}} \frac{2}{t^2+1}\ dt) = 2\sqrt{b}\ln(1+\frac{1}{b}) - 2\ln 2 + 4[\arctan t]_1^{\sqrt{b}} = 2\sqrt{b}\ln(1+\frac{1}{b}) - 2\ln 2 + 4\arctan\sqrt{b} - \pi \to 0 - \ln 4 + 2\pi - \pi = \pi - \ln 4$ då $b \to \infty$ ty $\sqrt{b}\ln(1+\frac{1}{b}) = \frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\ln(1+\frac{1}{b})}{1/b} \to 0\cdot 1 = 0$ enligt standardgränsvärde. Svar: $I(b) = 2\sqrt{b}\ln(1+\frac{1}{b}) - 2\ln 2 + 4\arctan\sqrt{b} - \pi$ och gränsvärdet är $\pi - \ln 4$.

5. (a) Se boken.

   (b) Eftersom $f(x) = x\sin x$ är kontinuerlig och $f(0) = 0 < 1 < f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ följer av satsen om mellanliggande värden att ekvationen har minst en lösning i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   (c) Eftersom $f(n\cdot 2\pi) = 0 < 1 < f(\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi) = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$, för varje heltal $n \geq 0$, följer av satsen om mellanliggande värden att ekvationen $x\sin x = 1$ har minst en lösning i varje intervall $[n\cdot 2\pi, n\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}]$, $n \geq 0$, vilket medför oändligt många lösningar.

6. Sätt $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$. Eftersom $f'(x) = \dfrac{6x(x^3+x)-(3x^2+1)^2}{(x^3+x)^2} = \dfrac{-3x^4-1}{(x^3+x)^2} < 0$ då $x > 0$ följer att $f(x)$ är strängt avtagande för $x > 0$.

   En lämplig figur visar att $\displaystyle\sum_1^n \frac{3k^2+1}{k^3+k} > \int_1^n \frac{3x^2+1}{x^3+x}\ dx = /\frac{3x^2+1}{x^3+x} = \frac{3x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}/ = \int_1^n (\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1})\ dx = [\ln x + \ln(1+x^2)]_1^n = \ln n + \ln(n^2+1) - \ln 2 \to \infty$ då $n \to \infty$.

   Uppskattningen $\dfrac{3k^2+1}{k^3+k} > \dfrac{3k^2}{k^3+k^3} = \dfrac{1}{2k}$, för $k \geq 1$, ger en enklare räkning.

7. Eftersom f antar ett största och minsta värde på $[0,1]$ är f begränsad på intervallet, dvs det finns en konstant $C > 0$ sådan att $|f(x)| < C$ då $x \in [0,1]$. Således gäller enligt triangelolikheten att $\displaystyle|\int_0^1 x^n f(x)\ dx| \leq \int |x^n f(x)|\ dx < C\int_0^1 x^n\ dx = C[\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{C}{n+1} \to 0$ då $n \to \infty$, varav följer att $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\ dx = 0$.