Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 1 (TATA41)

2008–03–10 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \ln(2x+4) - 2\arctan x$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x^2-x-12}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin(e^x)}{4\ln x - 3e^{1+\ln x}}$

3. Bestäm en primitiv funktion till
   (a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ (b) $\dfrac{x+7}{x^2+2x-3}$ (c) $\dfrac{x}{\sqrt{6x-9x^2}}$

4. Beräkna $I(b) = \displaystyle\int_1^b \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$, $b \geqslant 1$ samt undersök $\displaystyle\lim_{b\to\infty} I(b)$.

5. (a) Formulera satsen om mellanliggande värden.
   (b) Har ekvationen $x\sin x = 1$ någon lösning på intervallet $[0, \pi/2]$?
   (c) Visa att ekvationen $x \sin x = 1$ har oändligt många lösningar.

6. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2+1}{k^3+k} \to \infty$ då $n \to \infty$.

7. Funktionen f är kontinuerlig på $[0,1]$. Visa att $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$.