Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 1 (TATA41)

2008–03–10 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \ln(2x+4) - 2\arctan x$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Undersök
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x^2-x-12}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin(e^x)}{4\ln x - 3e^{1+\ln x}}$

3. Bestäm en primitiv funktion till
   (a) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ (b) $\displaystyle\frac{x+7}{x^2+2x-3}$ (c) $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{6x-9x^2}}$

4. Beräkna $\displaystyle I(b) = \int_1^b \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$, $b \geqslant 1$ samt undersök $\displaystyle\lim_{b\to\infty} I(b)$.

5. (a) Formulera satsen om mellanliggande värden.
   (b) Har ekvationen $x\sin x = 1$ någon lösning på intervallet $[0, \pi/2]$?
   (c) Visa att ekvationen $x\sin x = 1$ har oändligt många lösningar.

6. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2+1}{k^3+k} \to \infty$ då $n \to \infty$.

7. Funktionen f är kontinuerlig på $[0,1]$. Visa att $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$.

Envariabelanalys 1, TATA41, 2008-03-10, lösningsförslag

1. $f(x) = \ln(2x+4) - 2\arctan x$ är definierad då $2x+4>0 \Leftrightarrow x > -2$. Eftersom $f(x) \to -\infty$ då $x \to -2+$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ är $x=-2$ en lodrät aymptot medan vågrät asymptot saknas.

   Vidare gäller att $f'(x) = \dfrac{2}{2x+4} - \dfrac{2}{1+x^2} = \dfrac{2x^2-4x-6}{(2x+4)(x^2+1)} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x^2+1)} = 0 \Leftrightarrow x=-1$ eller $x=3$.

   Teckenschemat

x	-2		-1		3	
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nexists$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

   visar att $f(-1)$ är ett lokalt max medan $f(3)$ är ett lokalt min.

2. (a) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.
   $\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)} = \dfrac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \dfrac{3x}{\ln(1+3x)} \cdot \dfrac{2}{3} \to 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{2}{3} = 2/3$ då $x \to 0$ enligt standardgränsvärden. Svar: Gränsvärdet är $2/3$.

   (b) Gränsvärde av typ $\dfrac{0}{0}$.
   $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x-12} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-4)} = \dfrac{x-1}{x-4} \to 4/7$ då $x \to -3$. Svar: Gränsvärdet är $4/7$.

   (c) Gränsvärde av typ $\dfrac{\infty}{\infty}$.
   $\dfrac{x-\sin(e^x)}{4\ln x - 3e^{1+\ln x}} = \dfrac{x-\sin(e^x)}{4\ln x - 3ex} = \dfrac{1-\frac{\sin(e^x)}{x}}{\frac{4\ln x}{x} - 3e} \to \dfrac{1-0}{0-3e} = -\dfrac{1}{3e}$, då $x \to \infty$, pga hastighetstabellen och att $\sin t$ är begränsad. Svar: Gränsvärdet är $-\dfrac{1}{3e}$.

3. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2,\ t \geq 0,\ \frac{dx}{dt} = 2t \Leftrightarrow dx = 2t\,dt/ = \int \frac{2t}{t-1}\,dt = \int (2 + \frac{2}{t-1})\,dt = 2t + 2\ln|t-1| + C = 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}-1)^2 + C.$ Svar: Exempelvis $2(\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}-1|)$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\,dx =$/partialbråksuppdelning/$\displaystyle= \int (-\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1})\,dx = -\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + C.$ Svar: Exempelvis $2\ln|x-1| - \ln|x+3|$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{6x-9x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}\,dx = /t = 3x-1 \Leftrightarrow x = \frac{t+1}{3},\ dx = \frac{1}{3}dt/ = \frac{1}{9}\int \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{9}(-\int \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt) = \frac{1}{9}(-\sqrt{1-t^2} + \arcsin t) + C = \frac{1}{9}(-\sqrt{1-(3x-1)^2} + \arcsin(3x-1)) + C.$ Svar: Exempelvis $\dfrac{1}{9}(\arcsin(3x-1) - \sqrt{6x-9x^2})$.

4. $\int_1^b \frac{\ln(1+1/x)}{\sqrt{x}}\,dx = /t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2,\ t\geq 0,\ dx = 2tdt/ = \int_1^{\sqrt{b}} 2\ln(1+1/t^2)\,dt =$/ partiell integration / $= 2([t\ln(1+1/t^2)]_1^{\sqrt{b}} - \int_1^{\sqrt{b}} \frac{t}{1+1/t^2}\cdot\frac{-2}{t^3}\,dt) = 2([t\ln(1+\frac{1}{t^2})]_1^{\sqrt{b}} + \int_1^{\sqrt{b}} \frac{2}{t^2+1}\,dt) = 2\sqrt{b}\ln(1+\frac{1}{b}) - 2\ln 2 + 4[\arctan t]_1^{\sqrt{b}} = 2\sqrt{b}\ln(1+\frac{1}{b}) - 2\ln 2 + 4\arctan\sqrt{b} - \pi \to 0 - \ln 4 + 2\pi - \pi = \pi - \ln 4$ då $b\to\infty$ ty $\sqrt{b}\ln(1+\frac{1}{b}) = \frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\ln(1+\frac{1}{b})}{1/b} \to 0\cdot 1 = 0$ enligt standardgränsvärde. Svar: $I(b) = 2\sqrt{b}\ln(1+\frac{1}{b}) - 2\ln 2 + 4\arctan\sqrt{b} - \pi$ och gränsvärdet är $\pi - \ln 4$.

5. (a) Se boken.
   (b) Eftersom $f(x) = x\sin x$ är kontinuerlig och $f(0) = 0 < 1 < f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ följer av satsen om mellanliggande värden att ekvationen har minst en lösning i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   (c) Eftersom $f(n\cdot 2\pi) = 0 < 1 < f(\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi) = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$, för varje heltal $n\geq 0$, följer av satsen om mellanliggande värden att ekvationen $x\sin x = 1$ har minst en lösning i varje intervall $[n\cdot 2\pi, n\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}]$, $n\geq 0$, vilket medför oändligt många lösningar.

6. Sätt $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^3+x}$. Eftersom $f'(x) = \frac{6x(x^3+x)-(3x^2+1)^2}{(x^3+x)^2} = \frac{-3x^4-1}{(x^3+x)^2} < 0$ då $x>0$ följer att $f(x)$ är strängt avtagande för $x>0$.

   En lämplig figur visar att $\sum_1^n \frac{3k^2+1}{k^3+k} > \int_1^n \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx = /\frac{3x^2+1}{x^3+x} = \frac{3x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}/ = \int_1^n (\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1})\,dx = [\ln x + \ln(1+x^2)]_1^n = \ln n + \ln(n^2+1) - \ln 2 \to \infty$ då $n\to\infty$.

   Uppskattningen $\frac{3k^2+1}{k^3+k} > \frac{3k^2}{k^3+k^3} = \frac{1}{2k}$, för $k\geq 1$, ger en enklare räkning.

7. Eftersom f antar ett största och minsta värde på $[0,1]$ är f begränsad på intervallet, dvs det finns en konstant $C>0$ sådan att $|f(x)| < C$ då $x\in[0,1]$. Således gäller enligt triangelolikheten att $|\int_0^1 x^n f(x)\,dx| \leq \int |x^n f(x)|\,dx < C\int_0^1 x^n\,dx = C[\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{C}{n+1} \to 0$ då $n\to\infty$, varav följer att $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$.