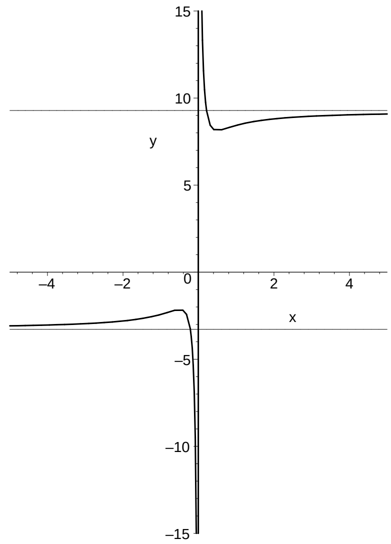
Envariabelanalys 1, TATA41, 2007-01-16, lösningsförslag

1. $f(x) = 4\arctan(2x) + \dfrac{1+3x}{x} = 4\arctan(2x) + \dfrac{1}{x} + 3$, så $f'(x) = \dfrac{8}{1+4x^2} - \dfrac{1}{x^2} =$
$= \dfrac{4x^2-1}{x^2(1+4x^2)} = \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x^2(1+4x^2)}$. Detta ger teckentabellen

x		$-1/2$		0		$1/2$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$1-\pi$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$5+\pi$	$\nearrow$

Dessutom så ser vi ur omskrivningen $f(x) = 4\arctan(2x) + \dfrac{1}{x} + 3$ att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3 + 2\pi$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3 - 2\pi$, $f(x) \to \infty$ då $x \to 0^+$ och $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^-$. Allt detta ger följande graf:



f har lokalt maximum i $x = -1/2$ och lokalt minimum i $x = 1/2$, f har vågräta asymptoter $y = 3 + 2\pi$ då $x \to \infty$ och $y = 3 - 2\pi$ då $x \to -\infty$ samt lodrät asymptot $x = 0$.

2. (a) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = \Big/\text{P.I.}\Big/ = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = \Big/\text{P.I.}\Big/ = x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\,dx\right) =$
$\left(x^2-2x+2\right)e^x\ (+C)$. Svar: $\left(x^2-2x+2\right)e^x$.

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+3}\,dx = \int \frac{x}{(x-3)(x-1)} =$
$\Big/ \dfrac{x}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-1}$, där $A = 3/2$, $B = -1/2 \Big/ =$
$\displaystyle = \int \left(\frac{3/2}{x-3} - \frac{1/2}{x-1}\right)dx = \frac{3}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x-1|\ (+C).$

Svar: $\dfrac{3}{2}\ln|x-3| - \dfrac{1}{2}\ln|x-1|$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{3+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{3+\sin^2 x}\,dx = \Big/\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx\Big/ = \ln|3+\sin^2 x|\ (+C) =$
$= \ln\left(3+\sin^2 x\right)\ (+C)$. Svar: $\ln\left(3+\sin^2 x\right)$.

3. (a) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$. Obestämt uttryck.

$$\frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-5x+6}=\frac{x(x^2-2x-3)}{x^2-5x+6}=\frac{x(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x(x+1)}{x-2}\to 12 \text{ då } x\to 3.$$

Svar: 12.

(b) Gränsvärde av typen $\infty(\infty-\infty)$. Obestämt uttryck.

$$x\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right)=\Big/\text{konjugatförlängning}\Big/=\frac{x\left((x^2+4)-(x^2-2)\right)}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}}=$$
$$\Big/\text{bryt ut } \sqrt{x^2}=x \text{ (ty } x>0) \text{ ur nämnaren}\Big/=\frac{6x}{x\left(\sqrt{1+4/x^2}+\sqrt{1-2/x^2}\right)}=$$
$$=\frac{6}{\sqrt{1+4/x^2}+\sqrt{1-2/x^2}}\to\frac{6}{2}=3 \text{ då } x\to\infty.$$

Svar: 3.

(c) Gränsvärde av typen $\frac{0}{0}$. Obestämt uttryck.

$$\frac{\sin 3x}{\ln(e+4x)-1}=\frac{\sin 3x}{\ln(e+4x)-\ln e}=\frac{\sin 3x}{\ln(1+4x/e)}=\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{4x/e}{\ln(1+4x/e)}\cdot\frac{3e}{4}\to$$
$$\to\frac{3e}{4} \text{ då } x\to 0, \text{ ty både } 3x \text{ och } \frac{4x}{e} \text{ närmar sig 0 då } x\to 0.$$

Svar: $\frac{3e}{4}$.

4. $$I(b)=\int_1^b\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\,dx=\int_1^b\frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx=\Big/\text{partialbråksuppdelning}\Big/=$$
$$\int_1^b\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1-x}{x^2+1}\right)dx=\left[\ln|1+x|+\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^b=$$
$$=\left[\arctan x+\frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right]_1^b=\arctan b+\frac{1}{2}\ln\frac{(b+1)^2}{b^2+1}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=$$
$$=\arctan b-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{(1+1/b)^2}{1+1/b^2}-\frac{1}{2}\ln 2\to\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2 \text{ då } b\to\infty.$$

Svar: $I(b)=\arctan b-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{(b+1)^2}{b^2+1}-\frac{1}{2}\ln 2\to\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$ då $b\to\infty$.

5. (a) Se boken. Glöm inte förutsättningarna.

(b) Låt $g(t)=\sin t^2$ och låt G vara en primitiv funktion till g. Då fås
$f(x)=\int_2^{x^3}\sin t^2\,dt=\int_2^{x^3}g(t)\,dt=\big[G(t)\big]_2^{x^3}=G(x^3)-G(2)$, vilket ger
$f'(x)=3x^2G'(x^3)=3x^2g(x^3)=3x^2\sin(x^3)^2=3x^2\sin x^6$.

Svar: $f'(x)=3x^2\sin x^6$.

(c) $g(x)=\int_x^3\frac{(t-1)e^{t^2}}{t^2+1}\,dt$ ger $g'(x)=-\frac{(x-1)e^{x^2}}{x^2+1}=\frac{(1-x)e^{x^2}}{x^2+1}$. Alltså får vi teckentabellen

x		1	
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$

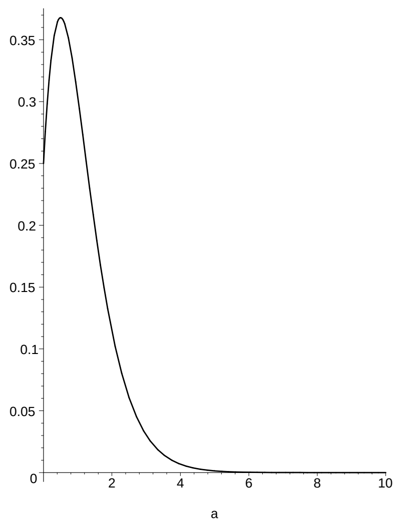
vilket visar att $g(x)$ har sitt störtsa värde för $x=1$.

Svar: $x=1$.

6. Studera linjen som tangerar kurvan i punkten (a, e^{-2a}). Linjen har lutningen $-2e^{-2a}$, så tangentens ekvation blir $y - e^{-2a} = -2e^{-2a}(x-a)$. Tangenten skär y-axeln då $x = 0$, då blir $y = (1+2a)e^{-2a}$. Tangenten skär x-axeln då $y = 0$, då blir $x = \dfrac{1+2a}{2}$.
Den efterfrågade triangelns area är därmed $A = \dfrac{\text{bas}\cdot\text{höjd}}{2} = \dfrac{1}{4}(1+2a)^2e^{-2a}\ ,\ a > 0$.
$A'(a) = \dfrac{4(1+2a)e^{-2a} - 2(1+2a)^2e^{-2a}}{4} = \dfrac{(1+2a)(1-2a)e^{-2a}}{2}$ ger teckentabellen

a	0		$1/2$	
$A'(a)$		$+$	0	-
$A(a)$		$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$

Dessutom gäller att $A(a) \to 1/4$ då $a \to 0$ och $A(a) \to 0$ då $a \to \infty$. Grafen till A ser alltså ut som följer:



Således antar A alla värden i intervallet $]0, 1/e]$. Svar: $V_A =]0, 1/e]$.

7. $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ och eftersom nämnaren är positiv så bestäms derivatans tecken av tecknet på $h(x) = x\cos x - \sin x$. Undersök den funktionen. $h'(x) = -x\sin x < 0$ på $0 < x < \pi$. Således är h strängt växande på intervallet, och eftersom $h(0) = 0$, så visar det att $h(x) < 0$ på $0 < x < \pi$ och därmed har vi visat att $f'(x) < 0$ på det givna intervallet. Funktionen f är sålunda strängt avtagande och har därmed en invers funktion g, och eftersom $f' \neq 0$ så är g deriverbar. $g'(2/\pi) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{x^2}{x\cos x - \sin x}$ i den punkt x där $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{2}{\pi}$. Vi ser att $x = \dfrac{\pi}{2}$ löser ekvationen, och eftersom f är injektiv (på intervallet) så finns inga andra lösningar. Således är $g'(2/\pi) = \dfrac{1}{f'(\pi/2)} =$
$= -\dfrac{\pi^2}{4}$.

Svar: $g'(2/\pi) = -\dfrac{\pi^2}{4}$.