Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 1 (TATA41)

2008–01–15 kl 8–13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 4\arctan(2x) + \dfrac{1+3x}{x}$. Ange alla lokala maxima och minima, samt lodräta och vågräta asymptoter, om sådana finns.

2. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) x^2e^x (b) $\dfrac{x}{x^2-4x+3}$ (c) $\dfrac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}$.

3. Undersök

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-5x+6}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\ln(e+4x)-1}$.

4. Beräkna $I(b) = \displaystyle\int_1^b \frac{2}{x^3+x^2+x+1}\,dx$, $b > 1$ samt undersök $\displaystyle\lim_{b\to\infty} I(b)$.

5. (a) Formulera analysens huvudsats.

   (b) Bestäm derivatan av $f(x) = \displaystyle\int_2^{x^3} \sin(t^2)\,dt$.

   (c) Låt $g(x) = \displaystyle\int_x^3 \frac{(t-1)e^{t^2}}{t^2+1}\,dt$. För vilket värde på x antar g sitt största värde?

6. I en punkt på kurvan $y = e^{-2x}$, $x > 0$, dras kurvans tangent. Denna skär, tillsammans med koordinataxlarna, ut en triangel. Vilka värden kan triangelns area anta?

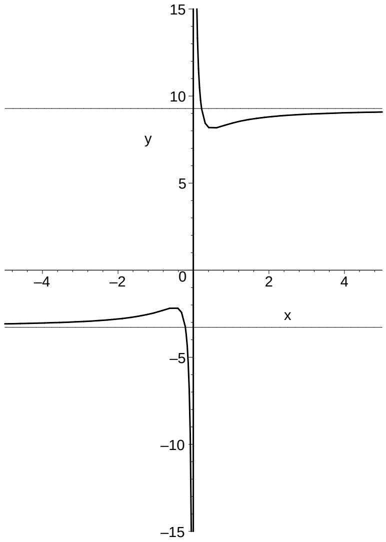
7. Låt $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $0 < x < \pi$. Visa att f har en deriverbar invers $g = f^{-1}$ och beräkna $g'\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

Envariabelanalys 1, TATA41, 2007-01-16, lösningsförslag

1. $f(x) = 4\arctan(2x) + \dfrac{1+3x}{x} = 4\arctan(2x) + \dfrac{1}{x} + 3$, så $f'(x) = \dfrac{8}{1+4x^2} - \dfrac{1}{x^2} =$
$= \dfrac{4x^2-1}{x^2(1+4x^2)} = \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x^2(1+4x^2)}$. Detta ger teckentabellen

x		$-1/2$		0		$1/2$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$1-\pi$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$5+\pi$	$\nearrow$

Dessutom så ser vi ur omskrivningen $f(x) = 4\arctan(2x) + \dfrac{1}{x} + 3$ att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3+2\pi$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3-2\pi$, $f(x) \to \infty$ då $x \to 0^+$ och $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^-$. Allt detta ger följande graf:



f har lokalt maximum i $x = -1/2$ och lokalt minimum i $x = 1/2$, f har vågräta asymptoter $y = 3+2\pi$ då $x \to \infty$ och $y = 3-2\pi$ då $x \to -\infty$ samt lodrät asymptot $x = 0$.

2. (a) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = \Big/ \text{P.I.} \Big/ = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = \Big/ \text{P.I.} \Big/ = x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\,dx\right) =$
$\left(x^2-2x+2\right)e^x \ (+C)$. Svar: $\left(x^2-2x+2\right)e^x$.

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+3}\,dx = \int \frac{x}{(x-3)(x-1)} =$
$\Big/ \dfrac{x}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-1}$, där $A = 3/2$, $B = -1/2 \Big/ =$
$\displaystyle = \int \left(\frac{3/2}{x-3} - \frac{1/2}{x-1}\right)dx = \frac{3}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x-1| \ (+C).$

Svar: $\dfrac{3}{2}\ln|x-3| - \dfrac{1}{2}\ln|x-1|$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{3+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{3+\sin^2 x}\,dx = \Big/ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \Big/ = \ln|3+\sin^2 x| \ (+C) =$
$= \ln\left(3+\sin^2 x\right) \ (+C)$. Svar: $\ln\left(3+\sin^2 x\right)$.

3. (a) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$. Obestämt uttryck.

$$\frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-5x+6}=\frac{x(x^2-2x-3)}{x^2-5x+6}=\frac{x(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x(x+1)}{x-2}\to 12 \text{ då } x\to 3.$$

Svar: 12.

(b) Gränsvärde av typen $\infty(\infty-\infty)$. Obestämt uttryck.

$$x\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right)=\Big/\text{konjugatförlängning}\Big/=\frac{x\left((x^2+4)-(x^2-2)\right)}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$\Big/\text{bryt ut } \sqrt{x^2}=x \text{ (ty } x>0\text{) ur nämnaren}\Big/=\frac{6x}{x\left(\sqrt{1+4/x^2}+\sqrt{1-2/x^2}\right)}=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{1+4/x^2}+\sqrt{1-2/x^2}}\to\frac{6}{2}=3 \text{ då } x\to\infty.$$

Svar: 3.

(c) Gränsvärde av typen $\frac{0}{0}$. Obestämt uttryck.

$$\frac{\sin 3x}{\ln(e+4x)-1}=\frac{\sin 3x}{\ln(e+4x)-\ln e}=\frac{\sin 3x}{\ln(1+4x/e)}=\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{4x/e}{\ln(1+4x/e)}\cdot\frac{3e}{4}\to$$

$\to\frac{3e}{4}$ då $x\to 0$, ty både $3x$ och $\frac{4x}{e}$ närmar sig 0 då $x\to 0$. Svar: $\frac{3e}{4}$.

4. $$I(b)=\int_1^b\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\,dx=\int_1^b\frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx=\Big/\text{partialbråksuppdelning}\Big/=$$

$$\int_1^b\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1-x}{x^2+1}\right)dx=\left[\ln|1+x|+\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^b=$$

$$=\left[\arctan x+\frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right]_1^b=\arctan b+\frac{1}{2}\ln\frac{(b+1)^2}{b^2+1}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=$$

$$=\arctan b-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{(1+1/b)^2}{1+1/b^2}-\frac{1}{2}\ln 2\to\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2 \text{ då } b\to\infty.$$

Svar: $I(b)=\arctan b-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{(b+1)^2}{b^2+1}-\frac{1}{2}\ln 2\to\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$ då $b\to\infty$.

5. (a) Se boken. Glöm inte förutsättningarna.

(b) Låt $g(t)=\sin t^2$ och låt G vara en primitiv funktion till g. Då fås

$f(x)=\int_2^{x^3}\sin t^2\,dt=\int_2^{x^3}g(t)\,dt=\big[G(t)\big]_2^{x^3}=G(x^3)-G(2)$, vilket ger

$f'(x)=3x^2G'(x^3)=3x^2g(x^3)=3x^2\sin(x^3)^2=3x^2\sin x^6$.

Svar: $f'(x)=3x^2\sin x^6$.

(c) $g(x)=\int_x^3\frac{(t-1)e^{t^2}}{t^2+1}\,dt$ ger $g'(x)=-\frac{(x-1)e^{x^2}}{x^2+1}=\frac{(1-x)e^{x^2}}{x^2+1}$. Alltså får vi teckentabellen

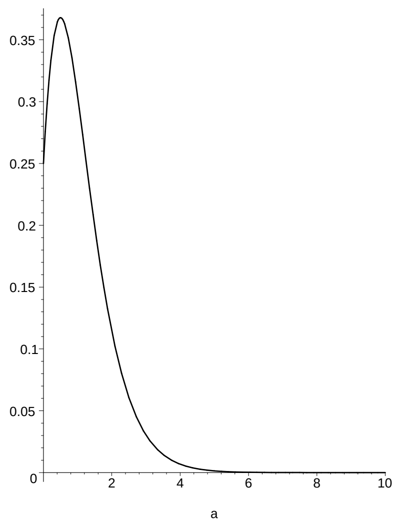
x		1	
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$

vilket visar att $g(x)$ har sitt störtsa värde för $x=1$. Svar: $x=1$.

6. Studera linjen som tangerar kurvan i punkten (a, e^{-2a}). Linjen har lutningen $-2e^{-2a}$, så tangentens ekvation blir $y - e^{-2a} = -2e^{-2a}(x-a)$. Tangenten skär y-axeln då $x = 0$, då blir $y = (1+2a)e^{-2a}$. Tangenten skär x-axeln då $y = 0$, då blir $x = \dfrac{1+2a}{2}$. Den efterfrågade triangelns area är därmed $A = \dfrac{\text{bas}\cdot\text{höjd}}{2} = \dfrac{1}{4}(1+2a)^2e^{-2a}$, $a > 0$.
$A'(a) = \dfrac{4(1+2a)e^{-2a} - 2(1+2a)^2e^{-2a}}{4} = \dfrac{(1+2a)(1-2a)e^{-2a}}{2}$ ger teckentabellen

a	0		1/2	
$A'(a)$		+	0	-
$A(a)$		$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$

Dessutom gäller att $A(a) \to 1/4$ då $a \to 0$ och $A(a) \to 0$ då $a \to \infty$. Grafen till A ser alltså ut som följer:



Således antar A alla värden i intervallet $]0, 1/e]$. Svar: $V_A =]0, 1/e]$.

7. $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ och eftersom nämnaren är positiv så bestäms derivatans tecken av tecknet på $h(x) = x\cos x - \sin x$. Undersök den funktionen. $h'(x) = -x\sin x < 0$ på $0 < x < \pi$. Således är h strängt växande på intervallet, och eftersom $h(0) = 0$, så visar det att $h(x) < 0$ på $0 < x < \pi$ och därmed har vi visat att $f'(x) < 0$ på det givna intervallet. Funktionen f är sålunda strängt avtagande och har därmed en invers funktion g, och eftersom $f' \neq 0$ så är g deriverbar. $g'(2/\pi) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{x^2}{x\cos x - \sin x}$ i den punkt x där $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{2}{\pi}$. Vi ser att $x = \dfrac{\pi}{2}$ löser ekvationen, och eftersom f är injektiv (på intervallet) så finns inga andra lösningar. Således är $g'(2/\pi) = \dfrac{1}{f'(\pi/2)} =$
$= -\dfrac{\pi^2}{4}$.

Svar: $g'(2/\pi) = -\dfrac{\pi^2}{4}$.