Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2020–03–16, 8–13.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2019 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva "G" respektive "G+1" i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(3 p) 1. En ljusstråle går genom punkten $P_1 = (1, 2, 3)$ i riktningen $-\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ och reflekteras i planet Π: $x - y + 2z = 2$. I vilken punkt träffar ljusstrålen planet och vilken riktning följer den reflekterade ljusstrålen?

(2 p) 2. (a) Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

i standardbasen för $\mathbb{R}^2$ och låt $F^*\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som har A^t som avbildningsmatris i standardbasen för $\mathbb{R}^2$. Beräkna egenvärden och egenvektorer till F och F^*.

(1 p) (b) Med inspiration från dina kalkyler i (a), *bevisa* att om $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ och F^* definieras som ovan så har F och F^* samma egenvärden.

(3 p) 3. Låt $a \in \mathbb{R}$ och låt $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ vara en linjär avbildning som i standardbasen har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm a så att nollrummet får positiv dimension. För detta/dessa värde/värden på a, bestäm bas och dimension för noll- respektive värderum.

(3 p) 4. En tetraeder har ett hörn i origo och de andra tre hörnen i punkterna

$$(1, 2, 1), \quad (2, -1, 1), \quad (1, 0, 2).$$

Låt L vara linjen som går genom origo och punkten $(2, 1, 2)$. Avgör om L skär tetraedern i någon mer punkt än origo. Om så är fallet, i vilken punkt sker detta?

(3 p) 5. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ utför en ortogonalprojektion på underrummet

$$\mathbb{U} = [(1,1,1,1),(1,2,3,4)] \subset \mathbb{R}^4,$$

d v s $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{\|\mathbb{U}}$. Bestäm F:s matris i standardbasen i $\mathbb{R}^4$.

(3 p) 6. Vilken sorts kurva definieras av ekvationen

$$6x_1^2 + 6x_1x_2 + 14x_2^2 - 15\sqrt{10}\,x_1 + 5\sqrt{10}\,x_2 = 55$$

Rita kurvan noggrannt (i x_1x_2-systemet). Relevanta punkter, avstånd, huvudaxelriktningar etc skall framgå av din figur. ***Figuren skall redovisas på separat papper!*** Välj skala förnuftigt.

(3 p) 7. Betrakta underrummen

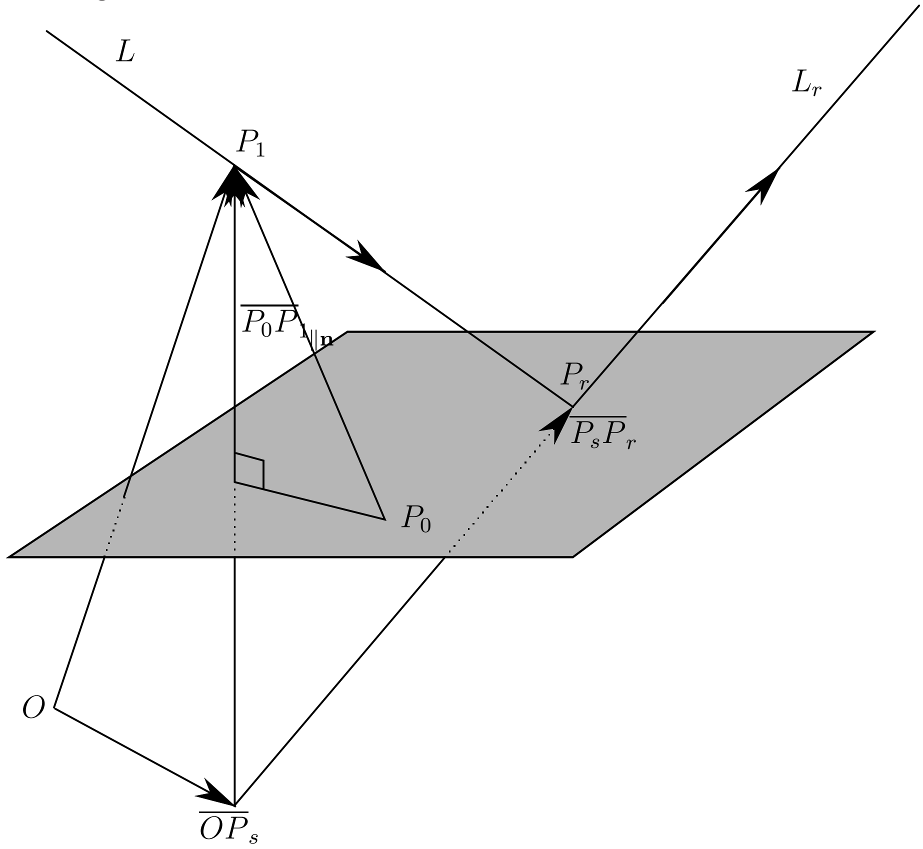
$$\mathbb{U} = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5\colon\, 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0\right\} \quad \text{och}$$

$$\mathbb{V} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right] \subset \mathbb{R}^5.$$

Bestäm en bas i $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ samt dess dimension.
($\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ = de vektorer som tillhör *både* $\mathbb{U}$ *och* $\mathbb{V}$.)

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2020–03–16

1. Rita figur så du ser vad du skall räkna ut!



Enligt förutsättningarna så följer ljusstrålen linjen

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$$

som insatt i ekvationen för Π ger

$$1-(2-t)+2(3-2t)=5-3t=2\iff t=1.$$

Detta ger då att ljusstrålen träffar planet i punkten P_r med ortsvektor

$$\overline{OP}_r=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+1\cdot\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Vi fortsätter med att beräkna spegelpunkten P_s med avseende på Π. Låt $P_1=(1,2,3)$ och tag en punkt $P_0\in\Pi$, t ex $P_0=(2,0,0)$. Sätt $\mathbf{n}=(1,-1,2)$ och beräkna $\overline{P_0P}_{1_{\|\mathbf{n}}}$.

$$\overline{P_0P}_1=\overline{OP}_1-\overline{OP}_0=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P}_{1_{\|\mathbf{n}}}=\frac{\overline{P_0P}_1\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}=\frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{3}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$\overline{OP}_s=\overline{OP}_1-2\overline{P_0P}_{1_{\|\mathbf{n}}}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Den reflekterade ljusstrålen kommer då att följa linjen L_r som går genom P_r och har en riktningsvektor parallell med $\overline{P_sP_r}$, d v s den sökta riktningen är

$$\overline{P_sP_r} = \overline{OP}_r - \overline{OP}_s = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

2. (a) Vi börjar med sekularekvationen till A

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)-6 = \lambda^2-3\lambda-4 = (\lambda+1)(\lambda-4) = 0 \iff$$
$$\iff \lambda = -1, 4$$
$$\underline{\underline{\lambda=-1}}: \left(\begin{array}{cc|c}2&2&0\\3&3&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},$$
$$\underline{\underline{\lambda=4}}: \left(\begin{array}{cc|c}-3&2&0\\3&-2&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}-3&2&0\\0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow X_{4} = t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Gör nu om samma operationer med A^t. Eftersom $\det B = \det B^t$ för alla $n\times n$-matriser B (Sats 4.4.1, sid 87) fås

$$\det(A^t-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix} = \det(A-\lambda I) = 0 \iff$$
$$\iff \lambda = -1, 4$$

enligt föregående kalkyl. Egenvärdena är alltså lika. Egenvektorerna är däremot olika i allmänhet, vilket vi nu skall se då vi beräknar dem för A^t

$$\underline{\underline{\lambda=-1}}: \left(\begin{array}{cc|c}2&3&0\\2&3&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}2&3&0\\0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},$$
$$\underline{\underline{\lambda=4}}: \left(\begin{array}{cc|c}-3&3&0\\3&-3&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}-1&1&0\\0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow X_{4} = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

(b) Enligt transponeringsreglerna (Sats 3.2.13, sid 63) gäller

$$A^t - \lambda I = A^t - \lambda I^t = (A-\lambda I)^t.$$

Beviset står därmed ovan så vi kopierar och stryker de konkreta determinanterna: Eftersom $\det B = \det B^t$ för alla $n\times n$-matriser B (Sats 4.4.1, sid 87) fås

$$\det(A^t-\lambda I) = \det(A-\lambda I)^t = \det(A-\lambda I) = 0,$$

Då A och A^t har samma sekularekvation har de också samma egenvärden. VSB.

3. Eftersom A är kvadratisk är $\dim N(F) > 0 \iff \det A = 0$. Vi får

$$\begin{vmatrix}1&0&0&1&2\\2&3&-3&2&-2\\0&1&0&a&-1\\0&0&a&1&1\\3&5&-4&4&-3\end{vmatrix} \overset{\substack{k_4-k_1\\k_5-2k_1}}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\2&3&-3&0&-6\\0&1&0&a&-1\\0&0&a&1&1\\3&5&-4&1&-9\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}\text{utveckla}\\\text{efter rad 1}\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}3&-3&0&-6\\1&0&a&-1\\0&a&1&1\\5&-4&1&-9\end{vmatrix} \overset{\substack{k_2+k_1\\k_4+2k_1}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utveckla} \\ \text{efter rad 1} \end{bmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3 - r_2}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{utveckla} \\ \text{efter rad 3} \end{bmatrix} = 3(1-a) \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1-a)(a-1) = 0 \iff a = 1.$$

Sätt $a = 1$ och lös $AX = 0$. Eftersom $V(F)$ är höljet av A:s kolonnvektorer blir detta också beroendeekvationenen för kolonnvektorerna. För kontrollens skull tar vi med ekvationen "LK av kolonnerna =godtycklig vektor". Vi får

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & y_1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & -2 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & y_4 \\ 3 & 5 & -4 & 4 & -3 & 0 & y_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_5 - 3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & y_1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -6 & 0 & -2y_1 + y_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & y_4 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & -9 & 0 & -3y_1 + y_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - 3r_3 \\ r_5 - 5r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_4}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & y_4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 & 0 & -2y_1 + y_2 - 3y_3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -4 & 0 & -3y_1 - 5y_3 + y_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_4 + 3r_3 \\ r_5 + 4r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2y_1 + y_2 - 3y_3 + 3y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3y_1 - 5y_3 + 4y_4 + y_5 \end{array}\right).$$

Vi börjar med $N(F)$. Ovanstående kalkyl ger

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_4 - 2x_5 = s - 2t \\ -x_4 + x_5 = s + t \\ -x_4 - x_5 = s - t \\ -s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

d v s $(1, 1, 1, -1, 0), (-2, 1, -1, 0, 1)$ är en bas i $N(F)$ som därmed har dimension 2. Om vi istället betraktar ovanstående som beroendeekvationen för kolonnerna får vi

$$\underline{\underline{s = 1,\ t = 0}}: \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3,$$

$$\underline{\underline{s = 0,\ t = 1}}: \quad -2\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_5 = \mathbf{0} \iff \mathbf{k}_5 = 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3.$$

Satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) ger då att

$$V(F) = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_5] = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3], \text{ d v s}$$
$$(1, 2, 0, 0, 3), (0, 3, 1, 0, 5), (0, -3, 0, 1, -4)$$

är en bas i $V(F)$ och $\dim V(F) = 3$.

Ekvationen "LK av kolonnerna =godtycklig vektor" behövs egentligen inte för att lösa problemet men kan vara bra att ha med för kontrollens skull. Ur denna fås att ekvationen är lösbar omm

$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 + 3y_4 = 0 \quad \text{och} \quad -3y_1 - 5y_3 + 4y_4 + y_5 = 0$$

vilket ger att en vektor $\mathbf{y}$ är en LK av kolonnerna omm dessa villkor är uppfyllda, d v s är ett element i $V(F)$ om detta stämmer. Vi får då

$$V(F)=[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3] = \left\{ (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{l} -2y_1 + y_2 - 3y_3 + 3y_4 = 0 \\ -3y_1 - 5y_3 + 4y_4 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Eftersom kolonnvektorerna genererar $V(F)$ skall ju dessa uppfylla ekvationerna och vi kan därför kontrollera våra kalkyler genom att sätta in dessa och se att det stämmer.

4. Skriv L på parameterform och byt sedan till den bas som ges av tetraederns kantvektorer.

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beräkna inversen till tranformationsmatrisen på vanligt sätt,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-5r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 14 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right) \overset{\substack{6r_1 \\ 6r_2 \\ -r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 14 & 0 & 10 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_3 \\ r_1-r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow T^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Skriv linjen i den ny basen med hjälp av basbytesformeln $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T \iff \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}}T^{-1}$.

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t\,\underline{\mathbf{f}}\,\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\,\frac{t}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Då alla koordinaterna för riktningsvektorn är positiva i den ny basen går L in i tetraedern. I den nya basen får hörnen koordinaterna

$$(0,0,0), \quad (1,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,1).$$

Tre av tetrederns begränsningsplan sammanfaller nu med koordinatplanen i den ny basen, d v s de får ekvationerna

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0$$

och då koordinaterna för L:s riktningsvektor är > 0 skär linjen inte något av dessa plan (förutom i origo). Då det fjärde begränsningsplanet innehåller punkterna

$$(1,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,1)$$

får det ekvationen $\quad y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Insättning av L i planets ekvation ger

$$\frac{5t}{7} + \frac{3t}{7} + \frac{3t}{7} = \frac{11t}{7} = 1 \iff t = \frac{7}{11}$$

vilket ger att skärningspunktens P ortsvektor fås som den punkt på L som svarar mot $t = 7/11$. Vi får

$$\overline{OP} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{7}{11} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

d v s linjen skär tetraedern i origo och i $P = \left(\frac{14}{11}, \frac{7}{11}, \frac{14}{11} \right)$.

5. Vi börjar med att bestämma en ON-bas i $\mathbb{U}$. Låt

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 = \frac{1}{4} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{10}{4} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{20}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi bestämmer sedan matrisen genom att beräkna F(basvektorerna). Ställ upp beräkningen av $F(\mathbf{e}_1)$ snyggt och prydligt så underlättar det i kalkylen av övriga eftersom det mesta går att återanvända, t ex blir ju skalärprodukten med $\mathbf{f}_1$ samma för alla fyra standardbasvektorerna.

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{e}_1) &= (\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 = \\
&= \frac{1}{4} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{20} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{4} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{20} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{10} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$F(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{4}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{20}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\5\\5\\5\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{20}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}8\\6\\4\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{4}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{20}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\5\\5\\5\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{20}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_4) = \frac{1}{4}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{20}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\5\\5\\5\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-9\\-3\\3\\9\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{20}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\2\\8\\14\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\\7\end{pmatrix}$$

vilket ger

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}7 & 4 & 1 & -2\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & 4 & 7\end{pmatrix}.$$

6. Låt Q vara den del av ekvationen som är en kvadratisk form och beräkna egenvärden och en ON-bas av egenvektorer till denna.

$$Q(\mathbf{u}) = 6x_1^2 + 6x_1x_2 + 14x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t A X_{\underline{\mathbf{e}}},$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix}6-\lambda & 3\\ 3 & 14-\lambda\end{vmatrix} = (6-\lambda)(14-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 10 \pm \sqrt{100-75} = 10 \pm 5 = 5, 15,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\ 3 & 9 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 15}}: \left(\begin{array}{cc|c}-9 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_{15} = t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \frac{1}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

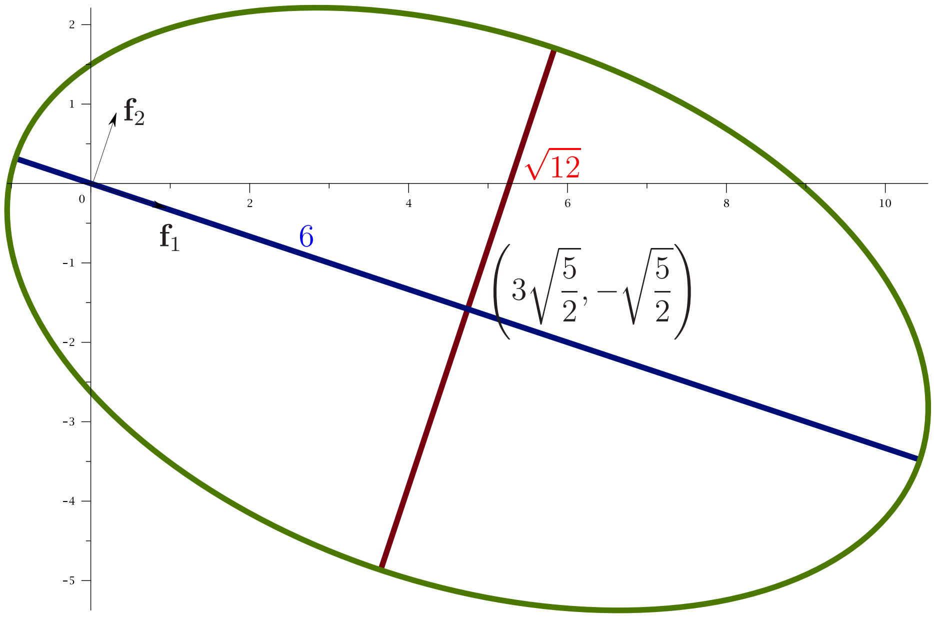
Då egenvärdena är positiva är kurvan en ellips. Byte till denna ON-bas av egenvektorer ger

$$
\begin{aligned}
&6x_1^2 + 6x_1x_2 + 14x_2^2 - 15\sqrt{10}\,x_1 + 5\sqrt{10}\,x_2 = \\
&\quad = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 5\sqrt{10}\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\
&\quad = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = 5y_1^2 + 15y_2 + 5\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\
&\quad = 5y_1^2 + 15y_2 + 5\begin{pmatrix} -10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5y_1^2 + 15y_2 - 50y_1 = 55 \iff \\
&\quad \iff y_1^2 + 3y_2 - 10y_1 = (y_1-5)^2 - 25 + 3y_2^2 = 11 \iff \\
&\quad \iff (y_1-5)^2 + 3y_2^2 = 36 \iff \frac{(y_1-5)^2}{36} + \frac{y_2^2}{12} = \left(\frac{y_1-5}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{12}}\right)^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Ur detta utläser vi att ellipsen har storaxel av längd 6 längs y_1-axeln, d v s i den riktning som ges av $\mathbf{f}_1$, lillaxel av längd $\sqrt{12}$ i den riktning som ges av $\mathbf{f}_2$ och att medelpunkten M har koordinater $(5,0)$ i det nya koordinatsystemet. I det ursprungliga koordinatsystemet fås då

$$
\overline{OM} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\mathbf{f}_1 = \frac{5}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{5}{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M = \left(3\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right).
$$

Vi får följande figur



7. Studera ekvationen "Linjärkombination av $\mathbb{V}$:s generarande vektorer = godtycklig vektor" för att få fraam ekvationerna för $\mathbb{V}$. Kallar vi de genererande vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$ fås

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \lambda_4\mathbf{v}_4 + \lambda_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{x} \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_1 \\ r_3\leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & x_5 \end{array}\right) \overset{r_4-r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & x_1-x_3+x_4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_4+2r_3 \\ r_5+r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1+2x_2-x_3+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2+x_5 \end{array}\right).$$

Ur detta får vi att ekvationen är lösbar, d v s $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{V}$ omm

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \quad \text{och} \quad x_2 + x_5 = 0, \text{ dvs}$$

$$\mathbb{V} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & & = 0 \\ x_2 & + & x_5 = 0 \end{array} . \right\}$$

En vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ om den uppfyller ekvationerna för både $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$, d v s

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{array} \right. \iff \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_3-2r_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_3+3r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_3 - x_4 = 3s + 7t \\ -x_5 = -t \\ s \\ -2x_3 - 5x_5 = -2s - 5t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff \mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \colon \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{array} \right. \right\} =$$

$$= \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

d v s $\mathbf{w}_1 = (3, 0, 1, -2, 0)$ och $\mathbf{w}_2 = (7, -1, 0, -5, 1)$ är en bas i $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ som därmed har dimension 2.